Министерство культуры Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
культуры и искусств

П. В. Гляков, Т. И. Песецкая

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

*Рекомендовано УМО по образованию в области культуры
и искусств в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений по специальности
1-21 04 01 Культурология (по направлениям)*

Минск
БГУКИ
2012

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я 73
Г558

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра Web-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета (зав. кафедрой В. С. Романчик, доцент, кандидат физико-математических наук);
В. С. Якимович, доцент кафедры естественнонаучных дисциплин Белорусского национального технического университета, кандидат педагогических наук

Гляков, П. В.
Г588 Основы высшей математики: учеб. пособие / П. В. Гляков, Т. И. Песецкая ; Мин-во культуры Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т культуры и искусств. – Минск : БГУКИ, 2012. – 194 с.
ISBN 978-985-6798-87-3.

Излагаются основы логики и теории множеств, общие понятия аналитической геометрии, основы теории функций и интегрального исчисления, элементы комбинаторики и теории вероятностей. К каждому параграфу приводятся контрольные вопросы и упражнения для самостоятельной работы, задания для организации тестирования на компьютере.

Предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов творческих специальностей высших учебных заведений.

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я 73

ISBN 978-985-6798-87-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В новые образовательные стандарты высших учебных заведений университетского типа для всех специальностей включена дисциплина «Основы высшей математики». Если для естественнонаучных специальностей высшая математика всегда являлась одной из основных дисциплин, подлежащих изучению, то для многих творческих и гуманитарных специальностей она введена впервые. То, что основы высшей математики должны изучаться студентами университетов всех специальностей, признано странами мирового сообщества и не подлежит обсуждению. Но каково должно быть содержание этой дисциплины для специальностей, для которых она изучается впервые? В каком объеме она должна изучаться? Как группировать различные разделы математики по группам специальностей? Эти и многие другие вопросы решаются в образовательных стандартах.

Настоящее пособие подготовлено на основе опыта его авторов, приобретенного в результате трехлетнего чтения основ высшей математики для студентов 1-го курса Белорусского государственного университета культуры и искусств, обучающихся по специальностям: «декоративно-прикладное искусство», «хореографическое искусство», «режиссура праздников», «народное творчество», «культурология», «искусствоведение», «социально-культурная деятельность».

Слабая начальная математическая подготовка, как правило, характерная для студентов творческих специальностей, обусловила и специальный способ изложения учебного материала. Многие доказательства утверждений и теорем в пособии опущены. Большое внимание уделяется рассмотрению решения многочисленных примеров и задач.

Пособие содержит семь глав. Первая глава представляет собой введение в теорию множеств. В ней рассматриваются такие вопросы, как множества и их спецификация, простейшие операции над множествами, подмножества и мощность множества.

Вторая глава знакомит с основами логики. В ней нашли отражение следующие вопросы: высказывания, таблицы истинности, условные и эквивалентные высказывания, построение формул, кванторы и множества.

В третьей главе содержатся общие понятия аналитической геометрии: декартова система координат, вектор, прямая на плоскости, кривые второго порядка, плоскость, поверхности второго порядка.

Четвертая глава посвящена основам теории функций действительного переменного. Рассматриваются следующие вопросы: предел и непрерывность функций, производная функции, применение производной к исследованию функций.

В пятой главе рассматриваются вопросы, ставшие уже давно традиционными для курса высшей математики: первообразная, неопределенный интеграл, определенный интеграл, применение определенного интеграла.

В шестой главе описываются элементы комбинаторики. Дается схема решения комбинаторных задач. Рассматриваются основные типы комбинаторных соединений: перестановки, размещения и сочетания; свойства биномиальных коэффициентов.

Седьмая глава посвящена основам теории вероятностей. Она содержит следующие параграфы: испытания и события, операции над событиями, вероятность события, операции над вероятностями, формулы вероятностей, дискретная случайная величина.

В главах пособия выделены параграфы. К каждому параграфу приводятся контрольные вопросы и упражнения для самостоятельной работы, задания для организации тестирования на компьютере.

Авторы выражают благодарность заведующему кафедрой Web-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета кандидату физико-математических наук, доценту В. С. Романчику и кандидату педагогических наук, доценту кафедры естественнонаучных дисциплин Белорусского национального технического университета В. С. Якимович за ценные и полезные замечания.

Все обнаруженные ошибки, замечания и предложения просьба высылать по электронному адресу kafit@buk.by.

1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МНОЖЕСТВ

Теория множеств – это раздел математики, в котором изучаются общие свойства множеств. Появление теории множеств принято считать с публикации работы Бернарда Больцано «Парадоксы бесконечного» (1850 г.). В этой работе рассматриваются числовые множества и определяется понятие взаимно однозначного соответствия множеств.

Дальнейшее развитие теория множеств получила в трудах Георга Кантора, Готлоба Фреге, Рихарда Дедекинда, Давида Гильберта, Бертрана Рассела и других выдающихся математиков. В 1904–1908 гг. Эрнст Цермело предложил первую версию аксиоматической теории множеств.

1.1. Множества и их спецификация

Понятие «*множество*» является одним из первичных (неопределяемых) понятий математики. Описательно термин «множество» объясняется как совокупность, коллекция, набор определенных различаемых объектов произвольной природы, объединенных по каким-то общим для них признакам (свойствам). Для любого объекта можно установить, принадлежит этот объект данному множеству или нет.

Примеры множеств: множество музыкальных инструментов, множество картин в галерее, множество символов на клавиатуре компьютера, множество кодов операций компьютера, множество книг в библиотеке, множество натуральных чисел.

Множество обычно обозначают прописными латинскими буквами, например: A, B и т. д. Для спецификации (задания) множества можно использовать следующие два способа.

Если множество содержит немного элементов, то мы просто перечисляем названия всех его элементов (первый способ). Например, если мы определим A как множество всех целых чисел строго между 6 и 10, то это можно записать следующим образом:

$$A = \{7, 8, 9\}$$

и прочитать как «A – множество, содержащее 7, 8, 9». Здесь символ «=» используется в определенном смысле: A равно множеству $\{\ldots\}$.

Другой способ спецификации множества состоит в следующем. Предлагается процедура спецификации множества. Множество можно охарактеризовать определенными свойствами, следовательно, множество A можно определить как

$$A=\{x: x \text{ – целое число и } 6<x<10\}$$

и прочитать как «A есть множество всех x таких, что …». При такой спецификации множеству A принадлежат только те элементы, которые являются целыми числами, большими 6 и меньшими 10, т.е. 7, 8 и 9, и, следовательно, мы имеем 7, 8, 9, как и ранее.

В этом способе спецификации множества может быть указан формальный закон построения элементов множества (например, формула общего члена числовой последовательности, периодическая система элементов Менделеева и т. д.).

Мы не делаем никакой оговорки о порядке, в котором рассматриваются элементы множества, поэтому было бы неправильно допускать какой-либо определенный порядок. В этом смысле справедливы следующие равенства:

$$\{7, 8, 9\}=\{8, 7, 9\}=\{9, 7, 8\}=\ldots .$$

Для любого заданного объекта можно определить, принадлежит ли он множеству A. В частности, если число принадлежит множеству, то будем говорить, что «оно является элементом множества». Так, например, если 7 является элементом множества A, то это утверждение может быть записано следующим образом: «$7 \in A$». Утверждение «6 не является элементом A» будем обозначать как «$6 \notin A$».

Упражнения 1.1

1. Какие из приведенных ниже множеств заданы верно?

$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $\boldsymbol{B}=\{2, 4, 5, 6, 2, 7\}$, $\boldsymbol{M}$ – множество арабских цифр, $\boldsymbol{P}$ – множество чисел.

2. Даны множества $X=\{1, 2, 3\}$ и $Y=\{3, 1, 2\}$.

а) Укажите, равны ли множества X и Y.

б) Запишите элементы множества Z, равного множествам X и Y. Сколько вариантов записи множества Z существует?

3. Запишите в явном виде элементы следующего множества

$$A=\{x: x \text{ – целое число и } x^2<2x\}.$$

4. Заданы множества $A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2\}$. Запишите в явном виде элементы следующих множеств:

а) $C=\{c: c=a+b, a\in A, b\in B\}$;

б) $D=\{d: d=a–b, a\in A, b\in B\}$;

в) $E=\{e: e=a\cdot b, a\in A, b\in B\}$.

5. Запишите явно элементы множества A, которые являются целыми положительными четными числами, меньшими 30 и не кратными 3.

Тест

1. Из заданных множеств $A=\{3, 5, 6\}$, $B=\{1, 2\}$ построены множества C, D, E, F, G следующим образом:

а) $C=\{c: c=a+4b, a\in A, b\in B\}$;

б) $D=\{d: d=3(a–b), a\in A, b\in B\}$;

в) $E=\{e: e=a\cdot b–1, a\in A, b\in B\}$;

г) $F=\{f: f=a\cdot b+2, a\in A, b\in B\}$;

д) $G=\{g: g=a^b–2, a\in A, b\in B\}$.

Выясните, какому множеству принадлежит элемент: а) 2; б) 8; в) 13; г) 15; д) 34.

2. Множества A, B, C, D, E заданы следующим образом:

а) $A=\{a: a=x+y, x\in\{1, 2, 3\}, y\in\{1, 2\}\}$;

б) $B=\{b: b=x+4y, x\in\{1, 2, 3\}, y\in\{1, 2\}\}$;

в) $C=\{c: c=x–y, x\in\{5, 6, 7, 8\}, y\in\{1, 2, 3, 4\}\}$;

г) $D=\{d: d=x^y+1, x\in\{4, 5, 6\}, y\in\{1, 2, 3\}\}$;

д) $E=\{e: e=x\cdot y–1, x\in\{1, 2, 3\}, y\in\{1, 2\}\}$.

Определите, какое множество содержит следующее количество элементов: а) 4; б) 5; в) 6; г) 7; д) 9.

1.2. Простейшие операции над множествами

Пусть даны множества A и B. *Пересечением* множеств A и B называется множество всех элементов, принадлежащих A и B, и обозначается $A\cap B$. Таким образом,

$$A\cap B=\{x\text{: } x\in A \text{ и } x\in B\}.$$

Аналогично *объединение* A и B обозначается $A\cup B$ и определяется следующим образом:

$$A\cup B=\{x\text{: } x\in A \text{ или } x\in B\}.$$

Следствием этих определений являются тождества:

$$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A,\ A\cup A=A,\ A\cap A=A.$$

Пример. Объединением множеств {1, 2, 4} и {2, 3} будет множество {1, 2, 3, 4}. Пересечением множеств {1, 2, 4} и {2, 3} будет множество {2}.

Разность множеств A и B (также называется *дополнением* B до A) записывается в виде $A\backslash B$ и определяется соотношением

$$A\backslash B=\{x\text{: } x\in A \text{ и } x\notin B\}.$$

Поэтому, если A={1, 2, 3} и B={2, 3, 4}, то $A\backslash B$={1} и $B\backslash A$={4}.

Симметрическая разность множеств A и B, т. е. $A\Delta B$, определяется как

$$A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B).$$

Пример 1. Предположим, что мы имеем две программы, называемые P и Q, и что A – множество всех значений данных, доступных P, а B – множество всех значений данных, доступных Q. Тогда $A\cap B$ – множество всех данных, доступных P и Q; $A\cup B$ – множество всех данных, доступных по крайней мере или P, или Q; $A\backslash B$ – множество всех данных, доступных P, но недоступных Q; $B\backslash A$ – множество всех данных, доступных Q, но недоступных P; $A\Delta B$ – множество всех данных, доступных только одной из программ P или Q.

Пустое множество (обозначается $\varnothing$) есть множество, обладающее свойством $x\notin\varnothing$ при любом x.

Второе множество, определение которого зависит от задачи, называют универсальным множеством.

Универсальное множество (обозначается U) есть множество всех рассматриваемых в данной задаче элементов.

Два множества не пересекаются, если $A \cap B = \varnothing$.

В каждом случае, когда U задано, определим *дополнение множества A* (обозначается A') как

$$A' = U \setminus A = \{x : x \notin A\}.$$

Из определений множеств $\varnothing$ и A' следует справедливость тождеств

$$A \cup A' = U, \; A \cap A' = \varnothing.$$

Пример 2. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 4\}$. Тогда верно следующее:

$$A \cap B' = A \cap \{1, 4\} = \{1, 4\};$$

$$(A \cap B)' = \{3\}' = \{1, 2, 4\};$$

$$(B \setminus A) \cup C = \{2\} \cup C = \{1, 2, 4\}.$$

Операции над множествами обладают следующими свойствами:

1) $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность сложения);

2) $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность умножения);

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность сложения);

4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность умножения);

5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность умножения относительно сложения);

6) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ (дистрибутивность умножения относительно вычитания);

7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Декартовым произведением множеств A и *B* называют множество $A \times B$ всех упорядоченных пар элементов (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Элементы a и b называют при этом *компонентами* (координатами) пары (a, b).

Декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ представляет собой множество всех упорядоченных n-ок (энок) элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_1 \in A, \ldots, a_n \in A_n$.

Упражнения 1.2

1. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4\}$; $A = \{3, 4\}$; $B = \{2, 3\}$; $C = \{1, 4\}$. Чему равно множество: а) $C \cup A'$; б) $A \cap B'$; в) $(B \setminus A) \cup C$; г) $A \Delta B$; д) $(A \setminus B) \cup C$?

2. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \cap B \neq \varnothing$ и $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$? Если существуют, то приведите пример.

3. Пусть декартово произведение множеств A и B равно $\{(3, 1), (2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 6), (2, 6), (3, 5), (3, 4)\}$. Как выглядят множества A и B?

4. Множество A_1 содержит 2 элемента, множество A_2 – 3 элемента, множество A_3 – 4 элемента. Сколько элементов содержит декартово произведение $A_1 \times A_2 \times A_3$?

5. Старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков – это один и тот же человек или (возможно) разные?

6. Лучший математик среди шахматистов и лучший шахматист среди математиков – это один и тот же человек или (возможно) разные?

Тест

1. Даны множества: $U=\{1, 2, a, b\}$; $A=\{a, b\}$; $B=\{2, a\}$; $C=\{1, b\}$ и операции: а) $\cup$; б) $\cap$; в) $\setminus$; г) Δ; д) $\times$. Какую операцию надо поставить в выражение, чтобы получилось равенство:

а) $A \cap B'$? $C=\{1, b\}$;

б) A ? $B=\{(a, 2), (a, a), (b, 2), (b, a)\}$;

в) $(A$? $B) \cup C=\{1, b\}$;

г) $(A \cup B)$? $C=\{a, 1, 2\}$;

д) $(A$? $C) \cup B=\{a, b, 2\}$?

2. Даны множества: $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; $A=\{1, 2, 3\}$; $B=\{2, 3\}$; $C=\{3, 4\}$. Из них построены следующие множества: а) $A \Delta C$; б) $A \cap B' \setminus C$; в) $(B \cap A') \cup C$; г) $A \times B$; д) $(A \cup C) \cup B$.

Укажите, какое количество элементов содержит каждое из них: а) 3; б) 6; в) 1; г) 4; д) 2.

1.3. Подмножества

Иногда при доказательстве свойств множеств полезно иметь их графические представления. Такие представления не могут заменить доказательства, но могут быть полезны. Они позволяют быстро и просто убедиться, справедливо ли конкретное утверждение и, следовательно, доказательство его возможно, или же убедиться в том, что утверждение неверно. В последнем случае можно заметить, как следует строить пример для доказательства неверности утверждения. Диаграммы, которые используются для этих целей, называют диаграммами Венна (по имени английского математика Джона Венна).

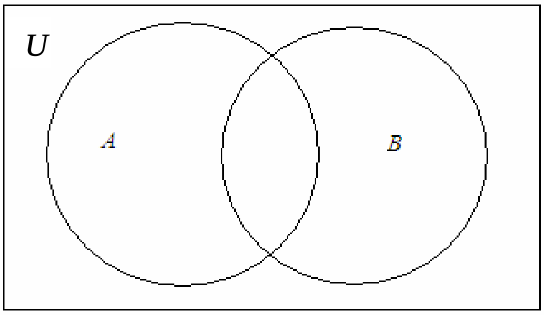


Рис.1. Представление множеств в общем случае

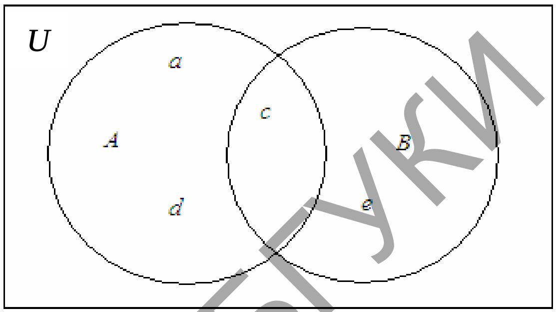


Рис. 2. Запись элементов внутри областей

Первоначально строится большой прямоугольник, представляющий множество U (рис. 1). Затем чертят круги (или какие-то другие подходящие замкнутые кривые) внутри прямоугольника, чтобы представить множества. Они должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче, и должны быть соответствующим образом обозначены (рис. 2).

Точки, которые лежат внутри различных областей диаграммы, сейчас могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств. Если число элементов в множествах мало, тогда отдельные элементы могут быть записаны внутри подходящих областей, как это показано в примере 1.

Пример 1. Пусть $U=\{a, c, d, e\}$, $A=\{a, c, d\}$, $B=\{c, e\}$. Соответствующая диаграмма изображена на рис. 2. Этот рисунок полностью иллюстрирует пример 1, обеспечивая знание элементов U.

Имея построенную подходящим образом диаграмму, мы можем заштриховать определенные области для обозначения вновь образованных множеств.

Пример 2. Чтобы представить множество $A\cup(B'\cap C)$, начнем с общей диаграммы, показанной на рис. 3. Заштрихуем B' диагональными линиями в одном направлении, а C – диагональными линиями в другом направлении (рис. 4). Площадь с двойной штриховкой представляет собой множество $B' \cap C$.

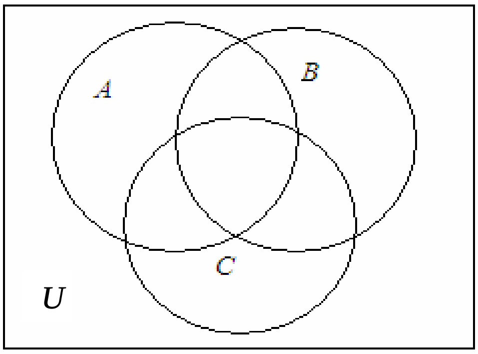


Рис. 3. Общий случай с тремя множествами

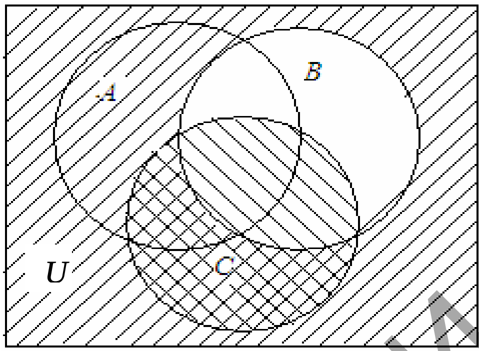


Рис. 4. Множество $B' \cap C$ с двойной штриховкой

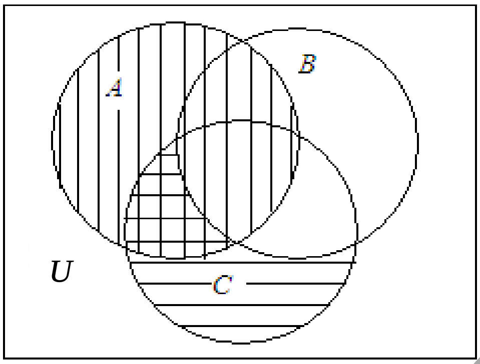


Рис. 5. Заштрихованная область представляет $A \cup (B' \cap C)$

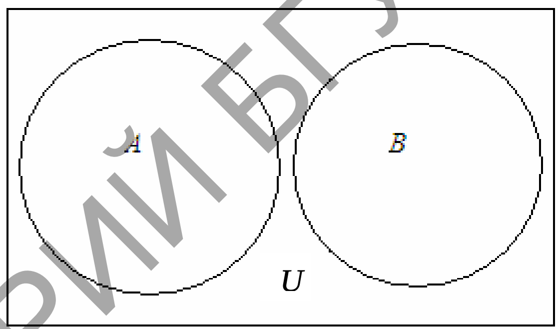


Рис. 6. Изображение двух непересекающихся множеств

На новой копии диаграммы заштрихуем эту область горизонтальными линиями, множество A – вертикальными. Вся заштрихованная на рис. 5 область представляет множество $A \cup (B' \cap C)$. Если в отдельных случаях мы имеем дополнительную информацию о рассматриваемых множествах, то ее можно использовать для упрощения диаграммы Венна.

Пример 3. Пусть $A \cap B = \varnothing$. Диаграмма этих множеств приведена на рис. 6.

В большинстве случаев множества содержат довольно много элементов, и, следовательно, эти элементы не могут быть представлены отдельно. Поэтому более удобно в этом случае говорить о каждом из множеств как о целом и не упоминать отдельных элементов.

Операции пересечения, объединения, разности и дополнения позволяют нам формировать новые множества. Однако, как правило, мы не можем сказать, как одно множество соотносится с другим.

Например, пусть даны два множества X и Y; пересечение $X \cap Y$ в некотором смысле «меньше» (или по крайней мере не больше), чем X. Действительно, все элементы множества $X \cap Y$ принадлежат также множеству X. Из этого наблюдения можно формально определить равенство множеств и различных выражений для того же самого множества. С помощью этих определений мы также в состоянии написать подходящие логические доказательства важных фактов, относящихся к множествам.

Пусть множества A и B таковы, что из принадлежности $x \in A$ следует, что $x \in B$, то A есть подмножество B, и обозначают это как $A \subseteq B$. Другими словами можно сказать, что множество A является подмножеством множества B, если каждый элемент множества A является одновременно элементом множества B. Соответствующая диаграмма Венна изображена на рис. 7.

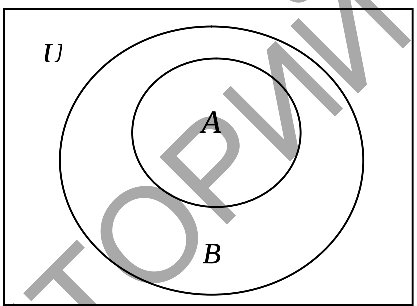


Рис. 7. Изображение подмножества

Если $A \subseteq B$ и существует элемент множества B, который не принадлежит A, то A называют собственным подмножеством B и записывают в виде $A \subset B$. Эти отношения могут быть записаны в обратном порядке:

$$B \supset A \text{ и } B \supseteq A.$$

Очевидно, что для любого множества A справедливы следующие три соотношения:

$$\varnothing \subseteq A,\ A \subseteq A,\ A \subseteq U.$$

Говорят, что множества A и B эквивалентны (записывается как $A=B$), если

$$A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A.$$

Это означает, что все элементы A являются элементами B, а все элементы B – элементами A.

Примеры:

1. Множество детей является подмножеством всего населения.

2. Пересечением множества целых чисел с множеством положительных чисел является множество натуральных чисел.

3. Объединением множества рациональных чисел с множеством иррациональных чисел является множество действительных чисел.

4. Нуль является дополнением множества натуральных чисел относительно множества неотрицательных целых чисел.

Степенным множеством $P(S)$ множества S называется множество, все элементы которого представляют собой подмножества множества S. Множество $P(S)$ всегда содержит, по меньшей мере, такие элементы, как пустое множество $\varnothing$ и множество S.

Одним из основных понятий математики является *отображение*. Пусть A и B – два непустых множества. Если каждому элементу $x \in A$ ставится в соответствие по правилу f один вполне определенный элемент $y \in B$, то говорят, что задано отображение множества A в множество B. Обозначается отображение следующим образом: f: $A \rightarrow B$. При этом $y=f(x)$ называют *образом элемента* x, а x – *прообразом элемента* y. Множество всех $y \in B$, в которые переходят различные $x \in A$, называют *множеством значений отображения* f и обозначают $f(A)$. Очевидно, что $f(A) \subseteq B$.

Если при отображении f каждый элемент $y \in B$ соответствует некоторому элементу $x \in A$, то говорят об отображении множества A на множество B.

Примеры:

1. Поставим в соответствие каждому слову некоторого словаря (на русском языке) его заглавную букву. Такое соответствие определяет отображение множества слов словаря в множество букв русского алфавита.

2. Поставим в соответствие каждому трехзначному числу цифру его десятков. Такое соответствие определяет отображение множества трехзначных чисел на множество $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Отображение f называют *обратимым*, если из условия $x_1 \neq x_2$ (x_1, $x_2 \in A$) вытекает $y_1 \neq y_2$ (y_1, $y_2 \in B$), т. е. разным прообразам соответствуют разные образы. В этом случае образ y имеет единственный прообраз x и можно определить отображение f^{-1}: $f(A) \rightarrow A$, называемое обратным к отображению f.

Обратное отображение устанавливает *взаимно однозначное соответствие* между множествами A и $f(A)$, т. е. такое соответствие, при котором каждому элементу множества A соответствует единственный элемент множества $f(A)$ и каждому элементу множества $f(A)$ соответствует единственный элемент множества A.

Отображение f называют *функционалом*, если множество B является множеством действительных чисел. Если же и множество A – числовое, то отображение f называют *функцией*.

Доказательство многих теорем состоит из последовательности утверждений вида

«если P, то Q»

(если справедливо P, то справедливо и Q). Для удобства запишем это утверждение как «$P \Rightarrow Q$» и будем читать

«из P следует Q».

Следовательно, если имеется последовательность P_0, P_1, ..., P_n такая, что $P_0 \Rightarrow P_1$, $P_1 \Rightarrow P_2$, ..., $P_{n-1} \Rightarrow P_n$ (из P_0 следует P_1, из P_1 следует P_2, ..., из P_{n-1} следует P_n), то мы имеем прямое доказательство $P_0 \Rightarrow P_n$.

Пример. Для любых множеств A, B и C справедливо утверждение:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Доказательство. $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ и $x \in (B \cup C) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x \in A \text{ и } x \in B) \text{ или } (x \in A \text{ и } x \in C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x \in A \cap B) \text{ или } (x \in A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Таким образом, $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Сейчас необходимо доказать включение $\subseteq$ в обратную сторону:

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x \in A \cap B) \text{ или } (x \in A \cap C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x \in A \text{ и } x \in B) \text{ или } (x \in A \text{ и } x \in C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ и } (x \in B \text{ или } x \in C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ и } x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C).$$

Следовательно,

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).$$

Поэтому

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

В этом частном случае вторая часть доказательства точно совпадает с первой, следовательно, можно записать

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \in (B \cup C) \text{ и т. д.}$$

Здесь символ «$\Leftrightarrow$» в выражении «$P \Leftrightarrow Q$» означает, что $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$. Он может читаться как «тогда и только тогда» (иногда также читают «если и только если») и означает эквивалентность двух утверждений P и Q.

Пример. Дополнение любого множества A ($A \subseteq U$) до множества U единственно.

Доказательство. Предположим, что существуют два множества B и C, каждое из которых удовлетворяет требованиям дополнения A, т. е.

$$B \cap A = C \cap A = \varnothing \text{ и } B \cup A = C \cup A = U.$$

Тогда $B = B \cap U = B \cap (C \cup A) = (B \cap C) \cup (B \cap A) = (B \cap C) \cup \varnothing = B \cap C$; поэтому

$$x \in B \Rightarrow x \in B \text{ и } x \in C \Rightarrow B \subseteq B \cap C \Rightarrow B \subseteq B \text{ и } B \subseteq C.$$

Однако мы знаем, что $B \subseteq B$. Поэтому отсюда следует, что $B \subseteq C$.

Аналогично, меняя ролями B и C, получаем $C \subseteq B$, откуда $B=C$, то есть $B=C=A'$ и A' единственно.

Приведенный пример содержит в себе основной математический подход, употребляемый для доказательства единственности, – сначала предполагается, что существуют два таких объекта, а затем доказывается, что они совпадают.

Пример. Даны множества A, B и C такие, что

$$A \cup B \cup C = U$$

и A, B и C попарно не пересекаются. Тогда $A' = B \cup C$, $B' = A \cup C$ и $C' = A \cup B$.

Доказательство.

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = U,$$

$$A \cap (B \cup C = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing.$$

Следовательно, $B \cup C$ удовлетворяет условиям для A', которое единственно. Поэтому $A' = B \cup C$. Аналогично проводятся доказательства для B' и C'.

Упражнения 1.3

1. Упростите выражения:

а) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$;

б) $((A \cup B) \cap B) \cup (A \cap (A \cap B))$;

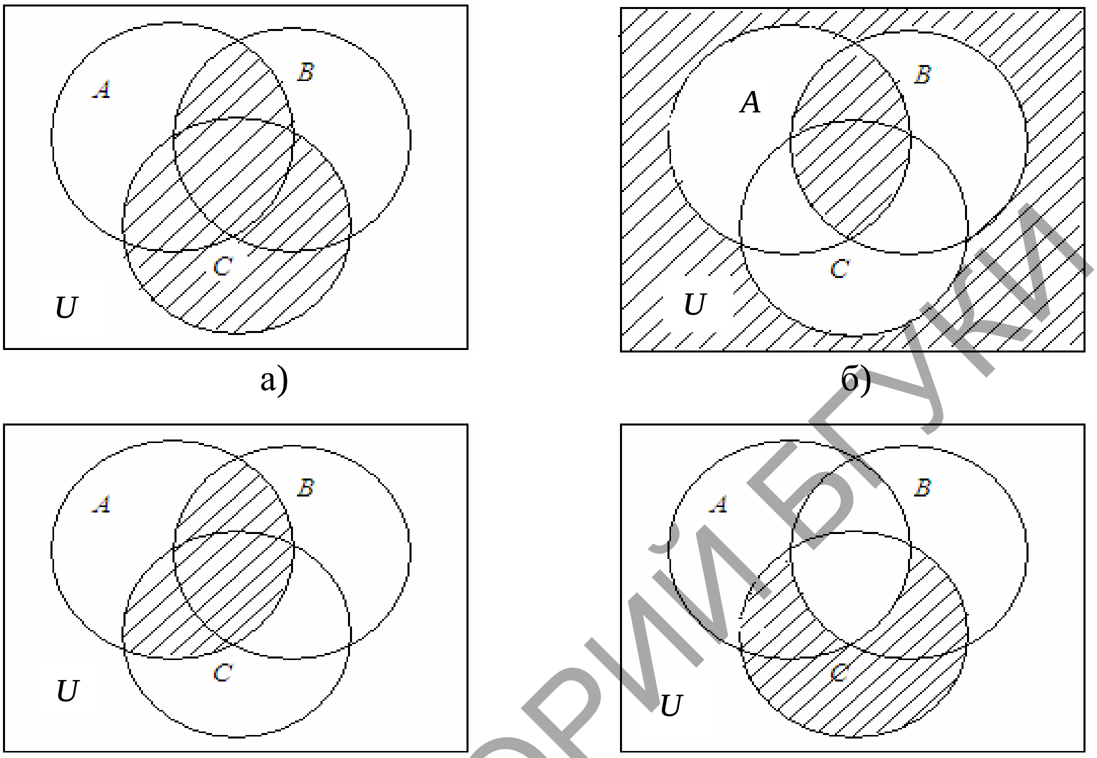
в) $A \cap (A \cup ((C \cap \mathrm{D}) \cup \mathrm{B})) \cup D \cup (C \cup (A \cap B))$;

г) $A \cap (((A \cup (C \cap D)) \cup D \cup (C \cup (A \cap B)))$;

д) $((A \cup B) \cap B) \cup (A \cap D) \cup ((C \cup A) \cap A)$.

2. Постройте диаграммы Венна для следующих множеств: а) $A \cup B'$; б) $A' \cap B'$; в) $A \cap B'$; г) $A' \cup B'$; д) $A \Delta B$.

3. Постройте по приведенным на рис. 8 диаграммам Венна выражения для множеств, им соответствующим:



а) б)

в) г)

Рис. 8. Диаграммы Венна для построения множеств

4. Дано множество $A=\{2,\ 4,\ 6\}$. Запишите в явном виде степенное множество $P(A)$.

5. Определите, сколько элементов содержит степенное множество множества с n элементами.

6. Пусть отображение задано таблично следующим образом:

a	b	c	d	e	f	g	h
1	2	3	4	5	6	7	8

Считаем, что каждой латинской букве в таблице поставлено в соответствие число, стоящее под буквой. Укажите, является ли это отображение: а) взаимно однозначным; б) обратимым; в) функционалом; г) функцией?

7. Используя отображение, заданное в предыдущем упражнении, шахматную доску можно представить, как показано на рис. 1.

Пусть дано множество $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Тогда декартово произведение $S=A\times A$, элементы которого представляются парами (x, y), где $x, y\in A$, есть множество клеток шахматной доски на рис. 9. В клетке (3, 4) находится конь.

а) Запишите в явном виде множество клеток $O\subset S$, в которые конь может пойти одним ходом, если доска пустая.

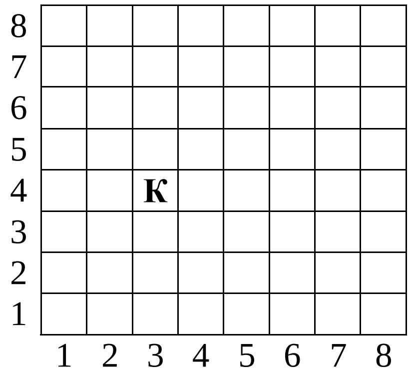


Рис. 9. Шахматная доска с числовым обозначением клеток

б) Запишите в явном виде множество клеток $D\subset S$, в которые конь может попасть за два хода, если доска пустая.

в) Запишите в неявном виде множество клеток O для пункта а) данной задачи.

Тест

1. На рис. 10 приведены диаграммы Венна.

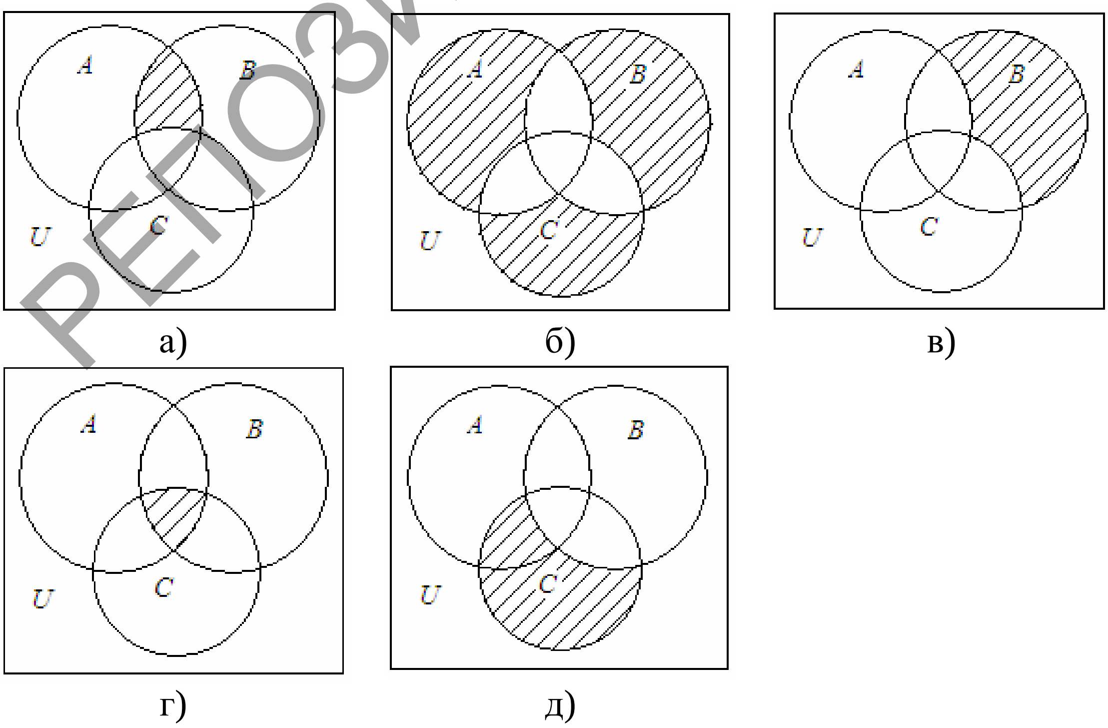


Рис. 10. Диаграммы Венна

Укажите, какая диаграмма Венна соответствует множеству: а) $A \cap B \cap C$; б) $C \setminus B$; в) $(A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$; г) $B \setminus (A \cup C)$; д) $(A \cap B) \setminus C$.

2. Какие из приведенных ниже соотношений:

а) $A \cap B \cap C \subseteq (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$;

б) $A \cap B \cap C \subseteq A \Delta B \Delta C$;

в) $A \Delta B \Delta C \subseteq A \cap B \cap C$;

г) $(A \Delta B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

д) $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \Delta B) \cap C$

являются верными для любых множеств A, B и C ?

1.4. Мощность множества

Рассмотрим множество

$$A=\{1, 2, ..., n\}=\{x: x \in \mathbf{N}, 1 \leq x \leq n\}.$$

Оно имеет n элементов. Будем говорить, что *мощность* (или размер, норма, длина) этого множества есть n. Это обозначается как

$$|A|=card(A)=n.$$

Множества A и B называют *эквивалентными*, или *равномощными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Множество A является *бесконечным*, если оно эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству; в противном случае множество A – *конечное*. Мощность конечного множества совпадает с количеством его элементов.

Определим множество **N** *целых положительных* (*натуральных*) чисел как $\mathbf{N}=\{1, 2, 3, ...\}$. Аналогично **Z** определяют как множество всех *целых чисел*

$$\mathbf{Z}= \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}.$$

Конечно, множества **N** и **Z** не могут быть выписаны явно (они достаточно велики), но в настоящее время мы должны понимать символ «...» как «и так далее».

Известно еще одно определение конечности множества. Говорят, что множество X конечно, если $X = \varnothing$ или если для некоторого $n \in \mathbf{N}$ существует множество $\{1, 2, ..., n\}$ такое, что оно имеет то же самое число элементов, что и X. Если $X \neq \varnothing$ и никакого n не может быть найдено, то X называют бесконечным.

Всякое бесконечное множество, эквивалентное множеству **N** натуральных чисел, называется *счетным множеством*.

Из любого бесконечного множества можно выделить счетное подмножество. Всякое бесконечное подмножество счетного множества является счетным подмножеством.

Объединение конечного или счетного множества счетных множеств есть счетное множество. Декартово произведение конечного множества счетных множеств есть счетное множество. Множества **Z** целых чисел и **Q** рациональных чисел есть счетные множества.

Множество **R** действительных чисел несчетно. Всякое бесконечное множество, эквивалентное множеству действительных чисел, называют *множеством мощности континуума*.

Мощность объединения двух множеств A и *B* равна сумме мощностей этих множеств без мощности пересечения этих множеств:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

Пользуясь этим утверждением, можно показать, что мощность объединения трех множеств вычисляется по следующей формуле:

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

Действительно,

$|A\cup B\cup C|=|A\cup(B\cup C)|=|A|+|B\cup C|-|A\cap(B\cup C)|=$

$=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)|=$

$=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$

В общем случае для множеств A_1, A_2, … A_n эта формула выглядит следующим образом:

$|A_1\cup A_2\cup\ \ldots\cup A_n|=|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_n|-[|A_1\cap A_2|+$

$+|A_1\cap A_3|+\ldots+|A_{n-1}\cap A_n|]+[|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+$

$+\ldots+|A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n|]-\ldots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|.$

Примеры:

1. По специальности «культурология» обучаются 120 студентов. Из них дисциплину «Видеомонтаж» выбрали 28 человек, дисциплину «Трехмерная графика» – 30 человек, дисциплину «Музыкальная информатика» – 42 человека. Причем 8 человек выбрали «Видеомонтаж» и «Трехмерную графику», 10 человек выбрали «Видеомонтаж» и «Музыкальную информатику», 5 человек выбрали «Трехмерную графику» и «Музыкальную информатику». Три студента выбрали три перечисленные дисциплины. Сколько студентов выбрали

другие дисциплины (то есть не выбрали ни одну из перечисленных дисциплин)?

Решение. Пусть S – множество всех студентов, $|S|=120$; B – множество студентов, выбравших «Видеомонтаж», $|B|=28$; T – множество студентов, выбравших «Трехмерную графику», $|T|=30$; M – множество студентов, выбравших «Музыкальную информатику», $|M|=42$.

Множества студентов, выбравших по две и три дисциплины, заданы следующим образом: $|B\cap T|=8$, $|B\cap M|=10$, $|T\cap M|=5$, $|B\cap T\cap M|=3$.

Обозначим через P множество студентов, выбравших перечисленные дисциплины, а через X – множество студентов, выбравших другие дисциплины. Тогда

$|X|=|S|–|P|=120–(|B|+|T|+|M|–|B\cap T|–|B\cap M|–|T\cap M|+$
$+|B\cap T\cap M|)=120–(28+30+42–8–10–5+3)=120–80=40.$

2. Студенты пришли на соревнования по зимним видам спорта. Все они были либо с лыжами, либо с коньками. Юношей было 16. С лыжами пришло всего 24 студента. Девушек с коньками было столько, сколько юношей с лыжами.

Сколько человек участвовало по лыжным и конькобежным видам спорта?

Решение. Обозначим множество девушек с лыжами как D_l, множество девушек с коньками – D_k, множество юношей с лыжами U_l, множество юношей с коньками U_k. Тогда количество участников соревнования будет равно

$|D_l \cup D_k \cup U_l \cup U_k|$=[Пересечение указанных множеств пустое множество]=

=$|D_l|+|D_k|+|U_l|+|U_k|$=[Юношей 16]=$|D_l|+|D_k|+16$=

=[Количество девушек с коньками равно количеству юношей с лыжами]=

=$|D_l|+|U_l|+16$=[С лыжами 24 участника соревнований]= 24+16=40.

Упражнения 1.4

1. Является ли множество иррациональных чисел счетным множеством?

2. Является ли счетным следующее множество:
$S=\{s: s=a+b, a\in \mathbf{N}, b\in \mathbf{N}\}$?

3. Дано множество натуральных чисел от 1 до 200. Сколько чисел в этом множестве, которые:

а) делятся нацело либо на 3, либо на 5, либо на 7;

б) делятся нацело на 3 и не делятся на 5;

в) делятся нацело на 5 и не делятся на 3 и 7?

4. На потоке обучаются 65 студентов, будущих культурологов-менеджеров; все они изучают дисциплины по выбору. «Видеомонтаж» изучают 39 человек; «Трехмерную графику» – 26 человек; «Музыкальную информатику» – 24 человека; 10 человек изучают «Видеомонтаж» и «Трехмерную графику»; 9 человек – «Видеомонтаж» и «Музыкальную информатику», а 8 человек изучают «Трехмерную графику» и «Музыкальную информатику».

Определите, сколько человек изучают:

а) все три дисциплины;

б) одну дисциплину;

в) две дисциплины;

г) только «Видеомонтаж»;

д) только «Трехмерную графику».

5. Найдите число целых положительных чисел, не превосходящих 300 и не делящихся ни на одно из чисел 2, 3 и 5.

6. В гимназии все ученики знают хотя бы один из древних языков – греческий или латынь, а некоторые – оба языка. 85 % всех ребят знают греческий язык и 75 % знают латынь. Какая часть учащихся знает оба языка?

Тест

1. В группе по специализации «информационные системы в культуре» 30 студентов. Все они увлекаются, по крайней мере, одним из следующих трех направлений информационных технологий: Web-дизайном, видеомонтажом, базами данных. Из них 18 студентов увлекаются Web-дизайном, 13 студентов – видеомонтажом, 15 студентов – базами данных; при этом 8 студентов увлекаются Web-дизайном и видеомонтажом, 5 студентов – Web-дизайном и базами данных, 6 студентов – видеомонтажом и базами данных.

Сколько студентов увлекаются:

а) тремя направлениями информационных технологий;

б) двумя направлениями информационных технологий;

в) одним направлением информационных технологий;

г) только видеомонтажом;

д) только базами данных.

Ответ выберите из приведенного списка значений:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 10; д) 14.

2. Из 100 студентов университета английский язык знают 28 студентов, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все три языка знают 3 студента. Сколько студентов:

а) не знают ни одного из трех указанных языков;

б) знают два из перечисленных языков;

в) знают один из перечисленных языков;

г) знают только немецкий язык;

д) знают только английский язык?

Ответ выберите из приведенного списка значений: а) 13; б) 75; в) 20; г) 14; д) 8.

Задачи

1. Какое множество является пересечением множества целых чисел с множеством положительных чисел?

2. Что является дополнением множества натуральных чисел относительно множества неотрицательных целых чисел?

3. Докажите или опровергните утверждения:

а) $((A\cap B)\setminus C)\cap((A\cap B)\setminus D)=(A\cap B)\setminus(C\cup D)$;

б) $((B\cap C)\setminus B)\cup((A\cap C)\setminus A)=((B\cap C)\setminus A)\cup((A\cap C)\setminus B)$;

в) $(A\cap B)\setminus C\cap D=((A\cap B)\setminus C)\cup((A\cap B)\setminus D)$;

г) $((B\cap C)\setminus A)\cup((A\cap C)\setminus B)=((B\cap C)\cup(A\cap C))\setminus(A\cup B)$;

д) $(A'\cap B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C)=((B\cap C)\setminus A)\cup((A\cap C)\setminus B)$.

4. Начертите диаграммы Венна для множеств:

а) $E=(A\cup B)\cap C$; б) $E=A'\cup(B'\cap C)$; в) $E=(A'\cap B)\cup C$;

г) $E=A'\cup(B\cap C)$; д) $E=A\cup(B\vartriangle C)$.

5. Докажите справедливость следующих утверждений:

а) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus C)\cup(A\setminus B)$;

б) $(A\setminus B)\cup C)=((A\cup C)\setminus B)\cup(B\cap C)$;

в) $(A\setminus B)\setminus(C\setminus D)=(A\setminus(B\cup C))\cup((A\cap D)\setminus B)$.

6. Справедливы ли следующие равенства:

а) $A'\cup B'=(A\cup B)'$;

б) $(A\cup B\cup C)'=A'\cap B'\cap C'$;

в) $(A\cup B\cup C)'=(A\cap B\cap C)'$?

7. Докажите, что симметрическая разность ассоциативна: $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$ для любых A, B, и C.

8. Пусть множество A содержит n элементов, а его подмножество B содержит k элементов. Сколько существует множеств C, для которых $B\subset C\subset A$?

9. При каких условиях имеют место утверждения: а) $A\cup B=A\cap B$; б) $A\cup A'=A$; в) $A\cap A'=A$?

1. Какие из приведенных ниже равенств

а) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap B\cup C)$;

б) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

в) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup B$;

г) $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap B$;

д) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;

е) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

верны для любых множеств A, B и C?

10. Проведите подробное доказательство верных равенств предыдущей задачи, исходя из определений. (Докажите, что множества в левой и правой частях равны. Пусть x – любой элемент левой части равенства. Тогда... Поэтому x входит в правую часть. Обратно, пусть...) Приведите контрпримеры к неверным равенствам.

11. На даче растут 18 кустов смородины. Дедушка полил половину кустов. Пришла бабушка и также полила половину кустов. При этом 2 куста оказались политыми и дедушкой, и бабушкой. Сколько кустов осталось не политыми?

12. Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7, ни на 11?

2. ОСНОВЫ ЛОГИКИ

Согласно одному из самых распространенных определений, *логика* есть анализ методов рассуждений. Изучая эти методы, логика интересуется в первую очередь формой, а не содержанием выводов в том или ином рассуждении. Истинность или ложность отдельных посылок или заключений не является существенной в логике. В логике важно знать, вытекает ли истинность заключения из истинности посылок.

Предметом изучения логики являются сложившиеся формы мысли с их свойствами, признаками, элементарными мыслительными методами; внутренние и внешние законы этих форм. Исследует логика и простейшие мыслительные методы, лежащие в основе всех остальных, специальных, значительно более сложных, приспособленных к специфике исследуемых предметных областей. Формы мысли, которые изучает логика, люди используют в своей интеллектуальной и практической деятельности.

Систематическая формализация и каталогизация правильных способов рассуждений – одна из основных задач логики. Если при этом применяется математический аппарат и его исследования посвящены в первую очередь изучению математических рассуждений, то такую логику можно назвать математической логикой.

Как наука логика сформировалась в трудах греческого философа Аристотеля в IV веке до нашей эры. Он систематизировал известные до него сведения, и эта система стала называться формальной, или Аристотелевой, логикой. Во времена Средневековья Аристотелева логика была дополнена еще пятью типами силлогизмов.

Хотя логика и является основой многих наук, тем не менее присущее ей, наряду с фундаментальностью, свойство самоочевидности действовало расхолаживающе на стремление к сколько-нибудь глубоким логическим исследованиям вплоть до XIX столетия. Интерес к логике оживился под влиянием открытия неевклидовых геометрий и стремления обеспечить строгое обоснование анализа. Этот новый интерес оставался все еще не столь жгучим до тех пор, пока на исходе XIX столетия математический мир не был потрясен открытием парадоксов, т. е. рассуждений, приводящих к противоречиям. Два из них мы рассмотрим.

Логический парадокс Рассела (1902 г.). Как известно, объекты, из которых состоит множество, называются его элементами. Множества сами могут быть элементами множеств, так, например, множество всех множеств целых чисел имеет своими элементами множества. Большинство множеств не являются элементами самих себя. Например, множество всех котов не является элементом самого себя, потому что оно само не кот. Возможны, однако, и такие множества, которые принадлежат самим себе как элементы, – например, множество всех множеств. Рассмотрим теперь множество A всех таких множеств X, что X не есть элемент X. Согласно определению, если A есть элемент A, то A также не есть элемент A, и если A не есть элемент A, то A есть элемент A. В любом случае A есть элемент A и A не есть элемент A.

Приведенное противоречие доказывает, что не существует множества A всех множеств, которые не принадлежат самим себе в качестве элемента.

Семантический парадокс лжеца. Некто говорит: «Я лгу». Если он при этом лжет, то сказанное им есть ложь, и, следовательно, он не лжет. Если же он при этом не лжет, то сказанное им есть истина, и, следовательно, он лжет. В любом случае оказывается, что он лжет и не лжет одновременно.

Семантические парадоксы включают в себя понятия, не выразимые внутри используемой системы множеств, поэтому нет никаких оснований распространять их без всяких ограничений на все множества.

В настоящее время логика широко применяется в информатике для построения компьютерных программ и доказательства их корректности. Понятия, методы и средства логики лежат в основе современных информационных технологий.

2.1. Высказывания

Высказывание – исходное понятие логики высказываний, поэтому мы его не определяем через другие понятия этой теории. Сделаем лишь некоторые пояснения. Формой существования высказывания является предложение естественного языка.

В естественном языке различают предложения четырех основных типов: повелительные, вопросительные, восклицательные и повествовательные.

Примеры различных типов предложений приведены ниже.

1. Повелительное предложение – *Сделайте то, что я вам говорю*.
2. Вопросительное предложение – *Что это?*
3. Восклицательное предложение – *Это великолепно!*
4. Повествовательное предложение – *Квадрат имеет четыре равные стороны*.

Логика высказываний рассматривает подмножества предложений, представляющих собой повествовательные предложения, которые могут подразделяться на истинные или ложные. Очевидно, что предложение «Квадрат имеет четыре равные стороны» обладает истинностным значением *истина*, а предложение «В феврале 30 дней» обладает истинностным значением *ложь*. Предложение, истинностное значение которого может быть определено, называется утверждением, или высказыванием.

Само высказывание – смысл, содержание предложения. Соотнесение содержания предложений, выражающих высказывание, с объективной действительностью приводит к разной оценке высказываний: если содержание предложения соответствует действительности, его оценивают как истинное, если такого соответствия нет, то – как ложное. Поэтому естественно считать, что всякое высказывание либо истинно, либо ложно и не может быть тем и другим одновременно.

Таким образом, все высказывания разбиваются на два класса – класс И (истинных высказываний) и класс Л (ложных высказываний). Классы И и Л обладают истинностными значениями. Часто вместо «высказывание принадлежит классу И (классу Л)» говорят «высказывание принимает (истинностное) значение И (значение Л)».

Следует заметить, что хотя всякое высказывание имеет одно из двух значений (И или Л), однако не всегда это значение известно. Примерами таких высказываний являются недоказанные или неопровергнутые гипотезы.

Высказывание принято называть также *закрытым* предложением, поскольку его истинностное значение не подлежит обсуждению. Предложения, на которые невозможно дать однозначный ответ, называются *открытыми* предложениями. Открытые предложения не являются высказываниями.

Примеры:

1. Предложение «Сельдерей имеет превосходный вкус» является открытым, поскольку оно является истинным для одних людей и ложным для других.

2. Предложение «Он имеет высокий рост» также является открытым, поскольку в нем содержится местоимение «он», а не указан конкретный человек. Истинностное значение не может быть присвоено открытому предложению до тех пор, пока не станет известно конкретное лицо (или персонаж), на которое указывает это местоимение. Еще одно затруднение, возникающее при анализе рассматриваемого предложения, состоит в определении смысла выражения «высокий рост». Человек, который для одних кажется высоким, другим может не показаться таковым. С подобной неоднозначностью понятия «высокий рост» невозможно справиться с помощью пропозициональной логики или логики предикатов, но такие проблемы легко решаются с использованием нечеткой логики.

3. Предложение «x делится на 2» в этом смысле не является высказыванием, пока не сказано, чему равно x; при разных значениях x получаются разные высказывания, одни – истинные (при четном x), другие – ложные (при нечетном x).

4. Предложение «Это утверждение ложно» – внутренне противоречивое утверждение.

Высказывания мы будем обозначать строчными буквами латинского алфавита: p, q, r, … . Например, p может обозначать утверждение «Река Свислочь начинается возле деревни Шаповалы», а q – «Квадрат целого числа есть положительное число».

На естественном языке для образования сложного предложения из простых используются связки. *Связками* называют особые части речи, соединяющие предложения. Наиболее часто употребляются связки: *и*, *или*, *нет*, *если … то*, *только если*, *тогда и только тогда*. В логике, в отличие от естественного языка, смысл таких связок должен быть определен однозначно.

Истинность сложного высказывания однозначно определяется истинностью или ложностью составляющих его частей. Высказывание, не содержащее связок, называется *простым*. Высказывание, содержащее связки, называется *сложным*.

Обозначим через p и q высказывания

p: «Кот любит мышей»,

q: «У зайца длинные уши».

Высказывание «Кот любит мышей и у зайца длинные уши» является сложным. Оно состоит из двух частей, соединенных связкой *и*. Это высказывание символически может быть записано в виде p *и* q или другим способом $p \wedge q$, где символ $\wedge$ обозначает слово *и* на языке символических выражений. Выражение $p \wedge q$ называется *конъюнкцией* высказываний p и q.

Аналогично высказывание «Кот любит мышей или у зайца длинные уши» символически выражается как

$$p \text{ или } q \quad \text{или} \quad p \vee q,$$

где символ $\vee$ обозначает слово *или* в переводе на символический язык. Выражение $p \vee q$ называется *дизъюнкцией* высказываний p и q.

Отрицание высказывания p обозначается через $\neg p$ (иногда можно встретить и другие обозначения этой операции: $\sim p$, $\bar{p}$). Если в нашем случае p есть высказывание «Кот любит мышей», то $\neg p$ будет обозначать высказывание «Коту не нравятся мыши».

Пусть r есть высказывание «Виктор любит музыку». Тогда высказывание «Виктору не нравится музыка и кот любит мышей или у зайца длинные уши» символически можно записать так $((\neg r) \wedge p) \vee q$.

Выражение $(r \wedge (\neg p)) \wedge q$ есть символическая форма записи высказывания «Виктор любит музыку и коту не нравятся мыши и у зайца длинные уши».

Упражнения 2.1

1. Найдите среди указанных ниже предложений высказывания. Укажите для найденных высказываний истинностные значения.

а) Где вы находитесь?

б) Наименьшее натуральное число есть 1.

в) Будьте бдительны!

г) Если $x^2 = -1$, то $x=1$.

д) Как дела?

2. Выясните, какие из указанных ниже предложений являются высказываниями. Установите для высказываний истинностные значения.

а) Запустите на компьютере Интернет.

б) Все числа, сумма цифр которых делится на 3, делятся на три.

в) Это утверждение не может быть истинным.

г) Гипотенуза в прямоугольном треугольнике длиннее его катетов.

д) Планета Земля имеет один спутник.

3. Определите, является ли предложение «Два, умноженное на x, больше x в квадрате»:

а) открытым предложением;

б) высказыванием?

4. Определите истинность следующих высказываний:

а) Кубический корень из отрицательного числа является положительным числом.

б) Расстояние от Солнца до Земли больше, чем до Венеры.

в) Натуральное число 6 является совершенным.

г) Число 0 противоположно само себе.

д) Корень квадратный из двух больше корня кубического из трех.

Тест

1. Ниже приведены предложения:

а) Заяц быстро бегает.

б) Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

в) Кто лучше знает комбинаторику?

г) Наименьшее натуральное число есть 0.

д) Запустите на компьютере поисковую систему Google.

Какое из них является:

а) вопросительным предложением;

б) открытым предложением;

в) истинным высказыванием;

г) повелительным предложением;

д) ложным высказыванием?

2. Какие из приведенных ниже высказываний являются истинными:

а) Корень третьей степени из 7 больше корня квадратного из 5;

б) Мощность конечного множества совпадает с количеством его элементов;

в) Объединение множества иррациональных чисел с множеством натуральных чисел является множеством действительных чисел;

г) Функция $y=\sin x$ является четной функцией;

д) Функция $y=e^x$ является ни четной, ни нечетной функцией?

2.2. Таблицы истинности

Рассмотрим выражение $p \wedge q$. Если кто-то говорит: «Кот любит мышей и у зайца длинные уши», то мы, естественно, представляем себе кота за ловлей мышей и зайца с длинными ушами. Во всех других случаях мы скажем, что говорящий не прав.

В этом примере возможны четыре случая. Высказывание может быть истинным (И) или ложным (Л), и независимо от того, какое истинностное значение принимает p, высказывание q также может быть истинным (И) или ложным (Л). *Таблица истинности* перечисляет все возможные комбинации истинности и ложности сложных высказываний. Таким образом, таблица истинности для конъюнкции p и q будет выглядеть следующим образом:

Случай	p	q	$p \wedge q$
1	И	И	И
2	И	Л	Л
3	Л	И	Л
4	Л	Л	Л

Из таблицы видно, что только в первом случае высказывание $p \wedge q$ является истинным; во всех остальных трех случаях оно является ложным.

Аналогичным образом определяется операция дизъюнкции двух высказываний p и q:

Случай	p	q	$p \vee q$
1	И	И	И
2	И	Л	И
3	Л	И	И
4	Л	Л	Л

Только в четвертом случае, когда высказывание p является ложным и высказывание q является ложным, дизъюнкция двух высказываний p и q будет ложной; остальные три случая соответствуют ситуации, в которой хотя бы одно из высказываний p или q является истинным. В этой ситуации и сложное высказывание $p \vee q$ будет истинным.

Отрицание высказывания p определяется следующей таблицей истинности:

Случай	p	$\neg p$
1	И	Л
2	Л	И

Истинностное значение $\neg p$ всегда противоположно истинностному значению p. В таблицах истинности отрицание всегда оценивается первым. Исключение составляет случай, когда за знаком отрицания следует высказывание, заключенное в скобки. Высказывание $\neg p \vee q$ интерпретируется как $(\neg p) \vee q$, так что отрицание применяется только к p. Если мы хотим отрицать все высказывание, то это можно сделать так: $\neg(p \vee q)$.

Символы $\vee$ и $\wedge$ называют *бинарными* связками, так как они связывают два высказывания, как, например, в выражениях $p \vee q$ и $p \wedge q$. Символ $\neg$ является *унарной* связкой, так как применяется только к одному высказыванию.

Строго говоря, знак операции отрицания – это не связка, поскольку отрицание применяется к одному операнду, следующему за знаком этой операции, т.е. фактически знак операции отрицания ничего не связывает. Операция отрицания имеет более высокий приоритет по сравнению с другими операциями, поэтому нет необходимости задавать круглые скобки вокруг выражения, в котором она применяется. Необходимость использования круглых скобок возникает тогда, когда отрицается не простое, а сложное высказывание.

Рассмотрим высказывание «Сергей окончит университет или не станет дизайнером и будет мало зарабатывать». Пусть p обозначает высказывание «Сергей окончит университет», q – высказывание «Сергей станет дизайнером», r – высказывание «Сергей будет мало зарабатывать». Тогда наше сложное высказывание можно представить в виде

$$p \vee ((\neg q) \wedge r).$$

Скобки использованы для того, чтобы показать, какие высказывания являются компонентами каждой связки.

Таблица истинности дает возможность однозначно указать те ситуации, когда высказывание $p \vee ((\neg q) \wedge r)$ является истинным. При составлении таблицы истинности мы должны рассмотреть все возможные случаи. Поскольку наше сложное высказывание содержит три основных высказывания p, q и r, то возможны восемь случаев:

Случай	p	q	r	$\neg q$	$(\neg q) \wedge r$	$p \vee ((\neg q) \wedge r)$
1	И	И	И	Л	Л	И
2	И	И	Л	Л	Л	И
3	И	Л	И	И	И	И
4	И	Л	Л	И	Л	И
5	Л	И	И	Л	Л	Л
6	Л	И	Л	Л	Л	Л
7	Л	Л	И	И	И	И
8	Л	Л	Л	И	Л	Л

При нахождении значений истинности для столбца $(\neg q) \wedge r$ мы используем столбцы для $(\neg q)$ и r, а также таблицу истинности для $\wedge$. Таблица истинности для $\wedge$ показывает, что высказывание $(\neg q) \wedge r$ истинно лишь в том случае, когда истинны оба высказывания $(\neg q)$ и r. Это имеет место в случаях 3 и 7.

Заметим, что при определении значений истинности для столбца $p \vee ((\neg q) \wedge r)$ играет роль только истинность высказываний p и $(\neg q) \wedge r$. Таблица истинности для дизъюнкции показывает, что единственный случай, когда высказывание, образованное с помощью связки *или*, ложно, – это случай, когда ложны обе части этого высказывания. Такая ситуация имеет место только в случаях 6 и 8.

Рассмотрим другой, эквивалентный способ построения таблицы истинности. Он отличается от предыдущего тем, что истинностные значения записываются не в столбце с выражением, для которого они определяются, а под связками, имеющимися в выражении.

Снова рассмотрим выражение $p \vee ((\neg q) \wedge r)$. Сначала мы записываем истинностные значения под переменными p, q и r непосредственно в самом выражении. Для удобства изложения будем нумеровать каждый шаг, на котором производятся вычисления соответствующих истинностных значений.

Таким образом, мы видим, что вначале заполняются столбцы с переменными p, q и r. Затем вычисляются истинностные значения высказывания $\neg q$. Далее под символом $\wedge$ записываются истинностные значения $(\neg q) \wedge r$. Наконец, записываем значения высказывания $p \vee ((\neg q) \wedge r)$ под символом $\vee$:

p	$\vee$	$((\neg$	$q)$	$\wedge$	$r)$
И	И	Л	И	Л	И
И	И	Л	И	Л	Л
И	И	И	Л	И	И
И	И	И	Л	Л	Л
Л	Л	Л	И	Л	И
Л	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	Л	Л	Л
1	6	5	2	5	3

Пример. Пусть p, q и r обозначают, соответственно, высказывания «Кот любит мышей», «Кот любит морковь», «Кот любит капусту». Требуется записать высказывание «Кот любит мышей и неверно, что он любит морковь или капусту» в символической форме и указать соответствующую ему таблицу истинности.

Заменим это высказывание эквивалентным – «Кот любит мышей и неверно, что кот любит морковь или капусту». Высказывание «Кот любит морковь или капусту» в символической форме записывается как $q \vee r$. Высказывание «Неверно, что кот любит морковь или капусту», символически записывается как $\neg(q \vee r)$, поскольку отрицание применяется ко всему высказыванию, которое стоит после слова «что».

Теперь ясно, что исходное высказывание символически можно записать так: $p \wedge (\neg(q \vee r))$. Таблица истинности для этого высказывания имеет вид:

p	$\wedge$	$(\neg$	$(q$	$\vee$	$r))$
И	Л	Л	И	И	И
И	Л	Л	И	И	Л
И	Л	Л	Л	И	И
И	И	И	Л	Л	Л
Л	Л	Л	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	Л
Л	Л	Л	Л	И	И
Л	Л	И	Л	Л	Л
1	6	4	2	4	3

Упражнения 2.2

1. Пусть p, q и r обозначают, соответственно, следующие высказывания: «Эта игра очень трудна», «Юрий играет в шахматы» и «Игра в шахматы требует времени».

Представьте следующие символические выражения как обычные высказывания:

а) $q \wedge r$; б) $p \vee \neg q$; в) $(p \vee r) \wedge q$; г) $p \wedge q \wedge r$; д) $p \vee q \vee r$.

Постройте для них таблицы истинности.

2. Постройте таблицы истинности для следующих высказываний: а) $p \wedge (q \vee \neg r)$; б) $(q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r)$; в) $\neg(p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r)$; г) $\neg(p \vee (q \wedge \neg r))$; д) $(p \wedge r) \vee (p \wedge \neg q)$.

Тест

1. Для двух символических выражений построены таблицы истинности:

	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$(r$	$\vee$	$q)$
1	И	И	И	И	И	И	И
2	И	И	И	И	Л	Л	И
3	И	И	Л	И	И	И	Л
4	И	И	Л	Л	Л	Л	Л
5	Л	Л	И	И	И	И	И
6	Л	И	И	И	Л	И	И
7	Л	Л	Л	И	И	И	Л
8	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
	1	2	3	4	5	6	7

	p	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$\neg$	$r)$
1	И	Л	И	Л	Л	И
2	И	И	И	И	И	Л
3	И	И	Л	Л	Л	И
4	И	И	Л	Л	И	Л
5	Л	Л	И	И	Л	И
6	Л	И	И	И	И	Л
7	Л	Л	Л	Л	Л	И
8	Л	Л	Л	Л	И	Л
	1	2	3	4	5	6

Найдите в таблицах истинности все ошибки и укажите номера их строк и столбцов. (Строки и столбцы в таблицах перенумерованы специально для этих целей.)

2. В таблице истинности, приведенной ниже, удалена верхняя строка с записью символического выражения:

И	И	И	И	И
И	И	И	Л	Л
И	И	Л	Л	И
И	И	Л	Л	Л
Л	И	И	И	И
Л	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	Л

Укажите, для какого символического выражения была построена эта таблица истинности. (Напомним, что к данному моменту времени вам известны только три связки: $\vee$, $\wedge$ и $\neg$.)

2.3. Условные и эквивалентные высказывания

В логике значение *условной операции* определяется по ее истинностной таблице. Смысл такой операции может быть переведен на естественный язык многими способами. Например, если дано следующее выражение:

$$p \to q,$$

в котором p и q представляют собой любые высказывания, то данное выражение может быть переведено на естественный язык таким образом:

p влечет за собой q;
если p, то q;
q только, если p;
p является достаточным для q;
q, если p;
q является необходимым для p.

Условным высказыванием называют высказывание вида $p \to q$, где p и q есть любые два высказывания, а символ $\to$ является бинарной связкой, называемой *импликацией*.

Выражение «Если идет дождь, то захвати с собой зонтик» может быть представлено в форме

$$p \to q,$$

в которой применяются следующие обозначения: p – «идет дождь»; q – «захвати с собой зонтик».

Иногда вместо символа → используется символ ⊃. Для обозначения условной операции может применяться также другой термин – *материальная импликация*.

Пример. Пусть через p обозначено высказывание «Гражданин в возрасте 18 лет или старше», а q обозначает высказывание «Гражданин имеет право голосовать». Условное выражение $p \rightarrow q$ может обозначать любое из следующих высказываний:

– «Гражданин находится в возрасте 18 лет или старше, и это влечет за собой, что данный гражданин имеет право голосовать».

– «Если гражданин находится в возрасте 18 лет или старше, то данный гражданин имеет право голосовать».

– «Гражданин имеет право голосовать, только если этот гражданин находится в возрасте 18 лет или старше».

– «Гражданин находится в возрасте 18 лет или старше, и этого достаточно, чтобы данный гражданин имел право голосовать».

– «Гражданин имеет право голосовать, если этот гражданин находится в возрасте 18 лет или старше».

– «Гражданин должен иметь возраст 18 лет или старше, и это условие является необходимым для того, чтобы он имел право голосовать».

В некоторых случаях потребовалось изменить формулировки, чтобы полученные предложения стали грамматически правильными предложениями естественного языка. В последнем предложении говорится о том, что если не выполняется требование, обозначенное как q, то не выполняется и p. Это предложение можно представить на правильном естественном языке так: «Чтобы получить возможность голосовать, необходимо иметь возраст 18 лет или старше».

В логике иногда для условного высказывания $p \rightarrow q$ используется специальная терминология, например, p называют *посылкой*, или *антецедентом*, а q – *заключением*, или *консеквентом*.

Двусторонняя условная операция обозначается как $p \leftrightarrow q$, где p и q есть любые два высказывания, а символ ↔ является бинарной связкой, называемой *эквиваленцией*.

Двусторонняя условная операция эквивалентна выражению $(p \to q) \wedge (q \to p)$ и является истинной только тогда, когда p и q имеют одинаковые истинностные значения.

Таким образом, выражение $p \leftrightarrow q$ является истинным, только если p и q одновременно имеют истинное значение или ложное значение. Двусторонняя условная операция имеет такие толкования:

p, если и только если q;

q, если и только если p;

если p, то q, и если q, то p.

Истинностные значения импликации и эквиваленции показаны ниже в таблице:

p	q	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
И	И	И	И
И	Л	Л	Л
Л	И	И	Л
Л	Л	И	И

Убедитесь в том, что выражения $(p \to q) \wedge (q \to p)$ и $p \leftrightarrow q$ имеют одинаковые истинностные значения.

Может возникнуть вопрос о том, как интерпретировать такие выражения, как $\neg p \vee q$, $p \wedge q \vee r$, $p \vee q \wedge r$, $p \wedge q \to r$ и $p \wedge q \leftrightarrow q \vee r$, в которых отсутствуют скобки. Во избежание неоднозначности лучше всегда использовать скобки. Однако здесь, как и в алгебре, имеется приоритет выполнения операций.

Операции выполняются в следующей последовательности: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ и $\leftrightarrow$. Поэтому указанные выражения можно интерпретировать как $(\neg p) \vee q$, $(p \wedge q) \vee r$, $p \vee (q \wedge r)$, $(p \wedge q) \to r$ и $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \vee r)$.

Иногда встречаются сложные высказывания, которые имеют различное строение, но являются истинными в одних и тех же случаях. Такие высказывания являются *логически эквивалентными*. Эквивалентность двух высказываний легко установить посредством сравнения их таблиц истинности.

Например, пусть p обозначает высказывание «Сегодня шел дождь», а q – высказывание «Сегодня шел снег». Рассмотрим сложные высказывания «Неверно, что сегодня шел дождь или снег» и «Сегодня не шел дождь и сегодня не шел снег».

Символически первое высказывание можно записать как $\neg(p \vee q)$, а второе – как $\neg p \wedge \neg q$.

Таблицы истинности для этих высказываний будут выглядеть следующим образом:

$\neg$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\neg$	p	$\wedge$	$\neg$	q
Л	И	И	И	Л	И	Л	Л	И
Л	И	И	Л	Л	И	Л	И	Л
Л	Л	И	И	И	Л	Л	Л	И
И	Л	Л	Л	И	Л	И	И	Л

В построенной таблице во всех четырех строках истинностные значения для выражений $\neg(p \vee q)$ и $\neg p \wedge \neg q$ совпадают. Это означает, что два рассматриваемых высказывания логически эквивалентны. Обозначается логическая эквивалентность двух высказываний с помощью символа ≡. В нашем примере это будет выглядеть так:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q.$$

Используя свойство эквивалентности, можно строить отрицание высказываний с дизъюнкцией, осуществляя отрицание каждой из ее частей и меняя дизъюнкцию на конъюнкцию.

Теорема. Справедливы следующие логические эквивалентности:

а) *Законы идемпотентности*:

$$p \wedge p \equiv p;$$
$$p \vee p \equiv p.$$

б) *Закон двойного отрицания*:

$$\neg(\neg p) \equiv p.$$

в) *Законы де Моргана*:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q;$$
$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q.$$

г) *Свойства коммутативности*:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p;$$
$$p \vee q \equiv q \vee p.$$

д) *Свойства ассоциативности*:

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r;$$
$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r.$$

е) *Свойства дистрибутивности*:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r);$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

ж) *Закон контрапозиции*

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p.$$

з) *Другие полезные свойства*

$$p \to q \equiv \neg p \vee q;$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p).$$

Доказать теорему можно, построив для каждой пары высказываний таблицы истинности.

Благодаря свойству ассоциативности высказывания $(p \wedge q) \wedge r$ и $p \wedge (q \wedge r)$ могут быть записаны в виде $p \wedge q \wedge r$. Аналогично высказывания $(p \vee q) \vee r$ и $p \vee (q \vee r)$ можно записать просто как $p \vee q \vee r$.

Тавтология – это составное высказывание, которое всегда является истинным, независимо от того, истинны или ложны отдельные высказывания, входящие в его состав. Теоремы в математике являются примерами тавтологий.

С другой стороны, *противоречие* – это составное высказывание, которое всегда является ложным. А *контингентными* называются высказывания, которые не представляют собой ни тавтологию, ни противоречие. Тавтологии и противоречия называются соответственно *логически истинными* и *логически ложными* высказываниями, поскольку их истинностное значение может быть определено исключительно на основании логического анализа высказывания.

Например, истинностная таблица для выражения $p \vee \neg p$ показывает, что это – тавтология, а для выражения $p \wedge \neg p$, что это – противоречие.

Пример. Дано высказывание $(p \wedge (p \to q)) \to q$. Требуется выяснить, является ли оно тавтологией.

Построим для этого высказывания таблицу истинности:

$(p$	$\wedge$	p	$\to$	$q))$	$\to$	q
И	И	И	И	И	И	И
И	Л	И	Л	Л	И	Л
Л	Л	Л	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	Л	И	Л

Столбец, который содержит истинностные значения для нашего исходного сложного высказывания, является предпоследним в таблице. Для всех возможных четырех случаев высказывание является истинным. Следовательно, оно является тавтологией.

Если у нас есть логически истинное высказывание-тавтология, то легко построить логически ложное высказывание-противоречие. Для этого достаточно взять отрицание логически истинного высказывания. Поэтому высказывание $\neg((p \wedge (p \to q)) \to q)$ логически ложно.

При получении новых логически истинных высказываний из каждого высказывания можно заменить любую его компоненту на логически эквивалентное ей высказывание. Полученное в результате такой замены высказывание будет логически эквивалентно исходному, поскольку истинностное значение высказывания зависит исключительно от истинностных значений составляющих его компонент, а не от их формы или сложности.

Упражнения 2.3

1. Из приведенного набора слов: тавтология, антецедент, посылка, консеквент, противоречие, заключение – выберите все пары слов, являющиеся антонимами.

2. Пусть p, q и r обозначают, соответственно, следующие высказывания: «Он читает романы», «Он любит детективы» и «Он – культуролог».

Запишите следующие высказывания в виде символических выражений:

а) «Если он читает романы и любит детективы, то он – культуролог».

б) «Если он не читает романов и не любит детективы, то он – культуролог».

в) «Если он читает романы, он любит детективы и если он не читает романов, то он – культуролог».

г) «Если он – культуролог, то он читает романы или он не любит детективы».

3. Постройте таблицы истинности для следующих выражений: а) $(p \to q) \to r$; б) $p \to (q \to r)$; в) $q \leftrightarrow (p \wedge r) \leftrightarrow ((q \to p) \wedge (q \to r))$; г) $(p \to q) \to (p \vee r)$; д) $(p \to q) \vee r) \to (\neg p \vee \neg q)$.

4. Некоторые условные высказывания, содержащие в качестве компонент высказывания p и q, имеют специальные названия: конверсия для $p \to q$ (записывается как $q \to p$); конт-

рапозиция для $p \to q$ (записывается как $\neg q \to \neg p$); инверсия для $p \to q$ (записывается как $\neg p \to \neg q$).

Используя таблицы истинности, покажите, что импликация $p \to q$ не эквивалентна ее конверсии $q \to p$.

Тест

1. Даны выражения: а) $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$; б) $(p \wedge q) \wedge (q \to p)$; в) $\neg q \to p$; г) $\neg(p \vee q)$; д) $p \to \neg q$.

Для каждого из них выберите из приведенного ниже списка подходящее осмысленное определение: а) p, если не q; б) либо p либо q; в) никакие p не есть q; г) ни p ни q; д) p, потому что q.

2. Пусть p, q и r обозначают, соответственно, следующие высказывания: «Он удачлив», «Он популярен» и «Он богат». Из этих высказываний построены символические выражения: а) $(p \to q) \to (p \wedge r)$; б) $(p \vee r) \to q)$; в) $q \leftrightarrow (p \wedge r)$; г) $(\neg r \to (\neg(p \vee \neg q))$; д) $\neg(p \to q)$.

Для каждого из символических выражений выберите соответствующее обычное высказывание из приведенного ниже списка:

а) «Не верно, что если он удачлив, то он богат».

б) «Из того, что он удачлив или богат, следует, что он популярен».

в) «Он популярен тогда и только тогда, когда он удачлив и богат».

г) «Если он не богат, то не верно, что он удачлив или не популярен».

д) «Он удачлив и богат потому, что если он удачлив, то он популярен».

2.4. Построение формул

Основными понятиями логики высказываний являются *переменные* и *формулы*. Значением переменной может быть логическое высказывание. Формула определяется следующим алгоритмом:

1. Если p – переменная, то p – формула.
2. Если p формула, то $(\neg p)$ – формула.

3. Если p и q – формулы, то $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \to q)$, $(p \leftrightarrow q)$ – формулы.

4. Других соглашений нет.

Подформулой называется часть формулы, которая сама является формулой. *Собственной подформулой* называется подформула, не совпадающая со всей формулой.

Построение формул выполняется по следующим двум правилам:

1. Элементарное высказывание (буква) является формулой нулевого уровня. Если элементарное высказывание всегда верно, то его обозначают буквой И, а если оно всегда неверно, – буквой Л. Тогда формулы первого уровня – это элементарные высказывания, к которым применена только одна логическая связка.

2. Пусть Φ_1 и Φ_2 – формулы ненулевого уровня. Тогда записи: $(\neg(\Phi_1))$, $((\Phi_1) \wedge (\Phi_2))$, $((\Phi_1) \vee (\Phi_2))$, $((\Phi_1) \to (\Phi_2))$, $((\Phi_1) \leftrightarrow (\Phi_2))$ также являются формулами. Если же одна из формул Φ_1 и Φ_2, к которым применяется логическая связка, имеет нулевой уровень, то она в скобки не заключается.

Логический анализ сложной формулы сводится к выделению всех ее частей, то есть подформул. В процессе такого анализа мы выделяем более короткие формулы, из которых на каждом этапе строится более длинная формула с применением одной связки. Самыми простыми частями формулы являются, разумеется, элементарные высказывания.

Примеры:

1. Пусть p, q и r – элементарные высказывания. Требуется выяснить, являются ли записи $\neg p \wedge qr$ и $(q) \wedge (p \vee q \to r)$ формулами.

Обе записи не являются формулами, поскольку в первой записи отсутствует логическая связка между q и r и отсутствуют скобки вокруг $\neg p$, а во второй записи формула нулевого уровня заключена в скобки.

2. Пусть p, q и r – элементарные высказывания. Выполните логический анализ записи $((\neg p) \wedge (q \vee r))$ и укажите, является ли она формулой.

Действительно,

1. p – формула	(п. 1 определения)
2. $(\neg p)$ – формула	(п. 2 (1) определения)
3. q и r – формулы	(п. 1 определения)

4. $(q \vee r)$ – формула (п. 3 (3) определения)

5. $((\neg p) \wedge (q \vee r))$ – формула (п. 3 (2, 4) определения)

Записи в правом столбце являются обоснованиями утверждений из левого столбца. Например, запись (п. 2 (1) определения) обозначает, что применен пункт 2 определения формулы к утверждению в 1 строке.

Таким образом, мы видим, что запись $((\neg p) \wedge (q \vee r))$ является формулой. Получена она по алгоритму определения формул.

3. Запись $(P \vee (Q \supset R)$ не является формулой. Покажем это.

Применяя пункт 3 (2) определения к формулам P и $(Q \supset R)$, получаем формулу $(P \vee (Q \supset R))$, а не запись $(P \vee (Q \supset R)$, так как в нем не хватает одной правой скобки. Значит, применение определения не может привести к слову $(P \vee (Q \supset R)$, а по пункту 4 этого определения других формул нет.

Поскольку в построенных по определению формулах оказывается слишком много скобок, иногда и не обязательных для однозначного понимания формулы, было принято соглашение о скобках, по которому некоторые из скобок можно опускать. Записи с опущенными скобками восстанавливаются так:

1. Если опущены внешние скобки, то они восстанавливаются.

2. Если рядом стоят две конъюнкции или дизъюнкции, например, $p \wedge q \wedge r$, то в скобки заключается самая левая часть, то есть две подформулы со связкой между ними.

3. Если рядом стоят разные связки, то скобки расставляются согласно приоритетам: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, и $\leftrightarrow$ (связки перечислены в порядке убывания приоритета).

Когда говорят о *длине формулы*, имеют в виду количество букв в восстановленной формуле, а не в ее сокращенной записи.

Пример. Определите длину записи $\neg p \vee q \wedge r$.

Восстановим опущенные скобки в записи $\neg p \vee q \wedge r$. Получим формулу $((\neg p) \vee (q \wedge r))$. В ней 12 букв, поэтому ее длина равна 12.

Упражнения 2.4

1. Выполните логический анализ записей: а) $(p \vee ((\neg q) \wedge r)$; б) $(\neg p \wedge (p \wedge (q \vee r)))$; в) $((\neg p) \rightarrow ((q \vee r) \rightarrow (p \wedge q))))$; г) $q \wedge (p \wedge q \vee r)$; д) $(p \wedge (q \vee r))$.

Укажите, какие из них являются формулами.

2. Восстановите опущенные скобки в записях: а) $p \vee q \wedge r$; б) $\neg p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$; в) $q \vee (p \wedge q \vee r)$; г) $\neg p \rightarrow ((q \vee r) \rightarrow (p \wedge q))$; д) $p \vee q \vee r \rightarrow q$.

3. Постройте формулы для следующих записей: а) $p \vee q \wedge r$; б) $\neg p \wedge p \rightarrow q$; в) $p \rightarrow q \wedge r$; г) $p \rightarrow q \leftrightarrow p$; д) $q \wedge (p \wedge q \vee r)$.

4. Определите длину записей: а) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$; б) $\neg p \rightarrow p \wedge q \wedge r$; в) $p \vee \neg q \wedge r$; г) $p \wedge \neg (q \vee r)$; д) $\neg (p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

Тест

1. Даны записи: а) $\neg p \rightarrow \neg p \wedge q \wedge r$; б) $q \wedge (p \wedge q \vee r)$; в) $p \vee q \wedge r$; г) $\neg (p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$; д) $\neg p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$. Из приведенного ниже списка значений выберите соответствующую длину записи: а) 9; б) 18; в) 21; г) 16; д) 13.

2. Даны записи: а) $p \vee q \wedge r$; б) $q \wedge (p \wedge q \vee r)$; в) $p \rightarrow q \leftrightarrow p$; г) $p \rightarrow q \wedge r$; д) $\neg p \wedge p \rightarrow q$. Укажите, какой из приведенных ниже формул каждая запись соответствует: а) $(q \wedge ((p \wedge q) \vee r))$; б) $(\neg (p \wedge p) \rightarrow q)$; в) $((p \vee q) \wedge r)$; г) $((p \rightarrow q) \leftrightarrow p)$; д) $(p \rightarrow (q \wedge r))$; е) $(((\neg p) \wedge p) \rightarrow q)$; ж) $q \wedge (p \wedge q \vee r)$; з) $(p \vee (q \wedge r))$; и) $((p \rightarrow q) \wedge r)$; к) $((\neg p) \wedge (p \rightarrow q)))$.

2.5. Кванторы и множества

Те возможности логики, с которыми мы до сих пор имели дело, не позволяют рассматривать внутреннюю структуру предложений. Расширение возможностей логики достигается за счет использования специальных слов, называемых *кванторами*. Эти слова очень важны, поскольку позволяют присваивать явные количественные оценки другим словам, более точно формулировать предложения. Все кванторы отвечают на вопрос «сколько» и поэтому позволяют применять более широкий круг выражений по сравнению с ранее изученными.

Предложение с *квантором всеобщности*, или *универсально квантифицированное предложение*, принимает одно и то же истинностное значение при подстановке всех объектов из одной и той же области определения. Квантор всеобщности представляется с помощью символа $\forall$, за которым следует один или несколько параметров, соответствующих переменным области определения. Символ $\forall$ интерпретируется как «для каждого» или «для всех». Например, в области определения чисел следующее выражение гласит о том, что для каждого x (где x – число) выражение $x + x = 2x$ является истинным:

$$(\forall x)(x + x = 2x).$$

А если указанное выражение будет обозначено символом p, то приведенное выше утверждение может быть представлено еще более кратко следующим образом:

$$(\forall x)(p).$$

В качестве еще одного примера предположим, что p обозначает предложение «Все собаки – животные», как показано ниже:

$$(\forall x)(\text{если } x \text{ – собака} \rightarrow x \text{ – животное}).$$

В качестве еще одного примера укажем, что предложение «Все треугольники являются многоугольниками» записывается следующим образом:

$$(\forall x)(x \text{ является треугольником} \rightarrow x \text{ является многоугольником}).$$

Это высказывание можно прочитать так: «Для всех x, если x – треугольник, то x – многоугольник». Более короткий способ записи логических высказываний, в которых участвуют предикаты, состоит в использовании *предикативных функций* для описания свойств рассматриваемого предмета. Поэтому приведенное выше логическое высказывание можно также записать следующим образом:

$$(\forall x)(\text{треугольник}(x) \rightarrow \text{многоугольник}(x)).$$

Предикативные функции обычно записываются с применением более краткой системы обозначений, в которой предикаты обозначаются прописными буквами. Например, предположим, что T обозначает треугольник, а M – многоугольник. В таком случае утверждение, касающееся треугольников, может быть записано более кратко, как показано ниже:

$$(\forall x)(T(\mathrm{x}) \rightarrow M(x)) \text{ или } (\forall y)(T(y) \rightarrow M(y)).$$

Следует отметить, что вместо фиктивных переменных x и y можно использовать любые другие переменные. В качестве еще одного примера предположим, что H – предикативная функция, обозначающая людей, а M – функция, обозначающая смертных. В таком случае утверждение, согласно которому все люди смертны, можно записать таким образом:

$$(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x)).$$

Это утверждение читается так: для всех x, если x – человек, то x смертен.

Квантор всеобщности может также интерпретироваться как конъюнкция предикатов, относящихся к отдельным экземплярам. Как было указано выше, экземпляром называется конкретный случай. Например, допустим, что собака по имени Стрелка представляет собой конкретный экземпляр класса собак. Эту мысль можно выразить следующим образом:

Лайка(Стрелка).

В данном примере Лайка – предикативная функция, а Стрелка – экземпляр. Такое предложение логики предикатов

$$(\forall x)P\ (x)$$

может интерпретироваться в терминах экземпляров a_i, как показано ниже:

$$P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge \cdots \wedge P\ (a_N\ ).$$

В этом случае многоточие указывает, что действие предиката распространяется на все элементы данного класса. Таким образом, в приведенном выше выражении сказано, что предикат применяется ко всем экземплярам класса. В выражениях может использоваться несколько кванторов. Например, как показано ниже, для формулировки закона коммутативности сложения для чисел требуются два квантора:

$$(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x).$$

В этом выражении утверждается, что “для каждого x и для каждого y сумма x и y равна сумме y и x”.

Квантор существования определяет утверждение как истинное применительно, по крайней мере, к одному элементу области определения. Он представляет собой ограниченную форму квантора всеобщности (в котором утверждается, что некоторое выражение является истинным для всех элементов области определения). Квантор существования записывается как символ $\exists$, за которым следует одна или несколько переменных, например, как показано ниже:

$(\exists x)(x{\cdot}x =1)$,

$(\exists x)$(Тигр(x)$\wedge$Имя(Шерхан)).

В первом из приведенных выше предложений указано, что имеется некоторое число *x*, результат умножения которого на самого себя равен 1. Во втором выражении сказано, что существует некоторый тигр по кличке Шерхан.

Квантор существования можно прочитать несколькими способами, в частности, таким образом: *существует, по меньшей мере, один, для некоторых, имеется некоторый, некоторые*.

В качестве еще одного примера можно привести выражение, в котором указано, что все аисты белые:

$$(\forall x)(\text{Аист}(x) \rightarrow \text{Белый}(x)).$$

А утверждение, что некоторые аисты серые, записывается со знаком логической операции $\wedge$ и квантором существования следующим образом:

$$(\exists x)(\text{Аист}(x) \wedge \text{Серый}(x)).$$

Так же как квантор всеобщности может быть выражен с помощью конъюнкции, квантор существования может быть выражен с помощью дизъюнкции экземпляров a_i:

$$P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee \cdots \vee P(a_N).$$

Ниже в таблице приведены примеры утверждений с кванторами, в которых P обозначает предложение «Слоны – млекопитающие», и их отрицания:

Номер	Пример	Значение
1	$(\forall x)(P)$	Все слоны – млекопитающие.
2	$(\exists x)(\neg P)$	Некоторые слоны не млекопитающие.
3	$(\exists x)(P)$	Некоторые слоны – млекопитающие.
4	$(\forall x)(\neg P)$	Никакие слоны не млекопитающие.

Примеры 1 и 2 являются отрицаниями по отношению друг к другу; таковыми являются также примеры 3 и 4. Обратите внимание на то, что отрицанием выражения с квантором всеобщности из примера 1 становится выражение с отрицанием предложения P с квантором существования, как показано в примере 2. Аналогичным образом отрицание выражения с квантором существования из примера 3 представляет выражение с отрицанием предложения P и квантором всеобщности, как показано в примере 4.

Кванторы и множества могут использоваться для определения подмножеств универсального множества U. Логическим эквивалентом универсального множества U является И (истинное значение), а пустого множества – Л (ложное значение).

Отношение, согласно которому A является строгим подмножеством B (имеющее вид $A \subset B$), означает, что все элементы множества A принадлежат к множеству B, но, в свою очередь, в множестве B имеется хотя бы один элемент, не принадлежащий к множеству A. Предположим, что E обозначает всех слонов, а M – всех млекопитающих. В таком случае следующее отношение между множествами $E \subset M$ представляет собой утверждение, что все слоны – млекопитающие, но не все млекопитающие являются слонами.

Обозначив множество животных серого цвета как G, а множество животных с четырьмя ногами – как F , можно записать утверждение, что все серые и четырехногие слоны являются млекопитающими, следующим образом:

$$(E \cap G \cap F) \subset M.$$

Пример. Даны предложения с кванторами: «Никакие слоны не являются рептилиями», «Некоторые слоны являются четырехногими и серыми». Требуется для них записать эквиваленты с множествами.

Введем обозначения: E – слоны; R – рептилии; G – серые; F – четырехногие. Тогда эквиваленты с множествами для наших предложений с кванторами можно записать следующим образом: $E \cap R = \varnothing$, $E \cap F \cap G \neq \varnothing$.

Между формой представления информации с помощью множеств и логической формой имеется еще одна аналогия, которая выражается в виде законов де Моргана:

Форма с использованием множеств	Логическая форма
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee q$
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge q$

Напомним, что символ эквивалентности ($\equiv$), т.е. знак двусторонней условной операции, означает, что выражение, находящееся слева от него, имеет такое же истинностное значение, как и выражение, находящееся справа. Это означает, что указанные выражения эквивалентны.

Безусловно, логика предикатов применима в ситуациях многих типов, но некоторые типы утверждений невозможно представить на основе логики предикатов с использованием кванторов всеобщности и кванторов существования. Например, в логике предикатов невозможно выразить следующее утверждение: «Большинство учащихся в классе получили отличные оценки». В этом утверждении квантор «большинство» означает «больше половины». Квантор «большинство» не может быть выражен в терминах квантора всеобщности и квантора существования.

Для реализации квантора «большинство» в логике должны быть предусмотрены некоторые предикаты, обеспечивающие подсчет количества элементов, что возможно при использовании нечеткой логики. Еще одно ограничение логики предикатов состоит в том, что она не позволяет выражать зависимости, которые могут быть истинными только иногда, но не всегда. Указанная проблема также может быть решена с помощью нечеткой логики. Однако внедрение в логическую систему средств проведения вычислений влечет за собой также появление дополнительных усложнений; к тому же в результате логика начинает в большей степени напоминать математику.

Упражнения 2.5

1. Даны выражения с множествами: а) $A = B$; б) $A \subseteq B$; в) $A \cup B$; г) A'; д) $A \cap B$.

Выберите для каждого из них соответствующий логический эквивалент из приведенного списка: а) $\forall x(x \in A \vee x \in B)$; б) $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$; в) $\forall x(x \in A \wedge x \in B)$; г) $\forall x(x \in U \wedge \neg(x \in A))$; д) $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.

2. Запишите приведенные ниже утверждения в квантифицированной форме:

а) «Все рыбы дышат жабрами».

б) «Все киты не дышат жабрами».

в) «Все киты не есть рыбы».

г) «Все киты – млекопитающие».

д) «Некоторые живущие в воде – млекопитающие».

е) «Никакая собака не является слоном».

Тест

1. Даны выражения: а) $(\forall x)(\mathrm{P})$; б) $(\exists x)(\neg \mathrm{P})$; в) $(\exists x)(\mathrm{P})$; г) $(\forall x)(\neg \mathrm{P})$.

Выберите для каждого из них соответствующую квантифицированную форму из приведенного ниже списка:

а) «Все собаки – млекопитающие».

б) «Некоторые программы содержат ошибки».

в) «Ни одна из моих программ не содержит ошибок».

г) «Некоторые программы не содержат ошибок».

2. Даны предложения с кванторами: а) «Некоторые слоны – серые»; б) «Никакие слоны не являются серыми»; в) «Некоторые слоны не являются серыми»; г) «Все слоны являются серыми и четырехногими»; д) «Все слоны и собаки являются млекопитающими».

Выберите для предложений с кванторами соответствующие эквиваленты с множествами из следующего списка: а) $E \cap G \neq \varnothing$; б) $E \cup D \subset M$; в) $E \cap G \neq \varnothing$; г) $E \cap G = \varnothing$; д) $E \subset G \cap F$.

В этом списке использованы обозначения: E – слоны; G – серые; F – четырехногие; D – собаки; M – млекопитающие.

Задачи

1. Пусть p, q и r обозначают, соответственно, следующие высказывания: «У Олега есть быстродействующий компьютер», «Олег окончит проект вовремя» и «Олег сдаст экзамен».

Запишите в символической форме такие высказывания:

а) «У Олега не быстродействующий компьютер или он закончит проект вовремя».

б) «Олег не закончит проект вовремя и не сдаст экзамен».

в) «Неверно, что Олег закончит проект вовремя и сдаст экзамен».

г) «У Олега быстродействующий компьютер или он не закончит проект вовремя и сдаст экзамен».

д) «Неверно, что у Олега не быстродействующий компьютер и он не сдаст экзамен».

2. Пусть p, q и r обозначают, соответственно, следующие высказывания: «Эта игра очень трудна», «Юрий играет в шахматы» и «Игра в шахматы требует времени».

Представьте следующие символические выражения как обычные высказывания: а) $q \wedge r$; б) $p \vee \neg q$; в) $(p \vee r) \wedge q$; г) $p \wedge q \wedge r$; д) $p \vee q \vee r$.

Постройте для указанных символических выражений таблицы истинности.

3. Постройте таблицы истинности для следующих высказываний: а) $p \wedge (q \vee \neg r)$; б) $(q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r)$; в) $\neg(p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r)$; г) $\neg(p \vee (q \wedge \neg r))$; д) $(p \wedge r) \vee (p \wedge \neg q)$.

4. Запишите следующие высказывания в виде символических выражений:

а) «Если я пройду этот курс и получу отличную оценку, то я пройду этот курс или получу отличную оценку».

б) «Если я пройду этот курс, то получу отличную оценку и я пройду этот курс и не получу отличную оценку».

5. Пусть p, q и r обозначают, соответственно, высказывания: «Он хорошо танцует»; «Он популярен»; «У него много друзей».

Запишите следующие символические выражения как обычные высказывания: а) $(p \wedge q) \rightarrow r$; б) $q \rightarrow \neg r$; в) $(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow r)$; г) $p \rightarrow (q \vee r)$.

6. Пусть p, q и r обозначают, соответственно, высказывания: «Он талантлив»; «Он популярен»; «Он богат».

Запишите следующие символические выражения как обычные высказывания: а) $\neg(p \rightarrow q)$; б) $(p \vee r) \rightarrow q$; в) $q \leftrightarrow (p \wedge r)$; г) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q))$.

7. Постройте таблицы истинности для следующих выражений:

а) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg r)) \rightarrow (r \rightarrow p)$;

б) $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$;

в) $(\neg(p \wedge \neg r) \vee q) \rightarrow (q \vee r)$;

г) $\neg((p \wedge \neg q) \vee r) \leftrightarrow (r \rightarrow q)$;

д) $((p \wedge r) \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))$.

Укажите, какие из этих выражений представляют собой тавтологии, противоречия или контингентные утверждения.

8. Дано высказывание «Если я голосую, то я хороший гражданин». Сформулируйте: а) конверсию этого выражения; б) инверсию этого выражения; в) контрапозицию этого выражения.

9. Преобразуйте следующие высказывания к виду: если p, то q:

а) «Достаточно иметь деньги, чтобы быть популярным».

б) «Только если я читаю Шекспира в оригинале, я владею английским языком».

в) «Для него достаточно реализовать проект по 3D-графике, чтобы защитить курсовую работу».

г) «Чтобы сдать зачет по дисциплине «Базы данных», надо выполнить все лабораторные работы».

д) «Он достигнет успеха, только если будет много трудиться».

10. Запишите истинностные таблицы для следующих выражений: а) $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$; б) $\neg(p \vee q)$; в) $\neg q \rightarrow p$; г) $p \rightarrow \neg q$; д) $(p \wedge q) \wedge (q \rightarrow p)$.

11. Запишите приведенные ниже утверждения в квантифицированной форме:

а) «Все киты живут в воде».

б) «Некоторые мои знакомые – студенты».

в) «Все студенты – учащиеся».

г) «Многие животные не обитают в пустыне».

д) «Некоторые мои друзья – спортсмены».

3. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

3.1. Декартова система координат

Выберем на плоскости точку *O* – *начало отсчета*. Проведем через нее две направленные взаимно перпендикулярные прямые *OX* и *OY* – *координатные оси*. Точка *O* разбивает каждую ось на две полуоси – положительную и отрицательную. Ось *OX* называется *осью абсцисс*, ось *OУ* – *осью ординат*. Положительные полуоси на чертеже отметим стрелками. Вдоль каждой из осей выберем масштабную единицу. Построенная таким образом система координат называется *декартовой прямоугольной системой координат на плоскости* (рис. 1). Плоскость, на которой задана декартова прямоугольная система координат, называется *координатной плоскостью OXY*.

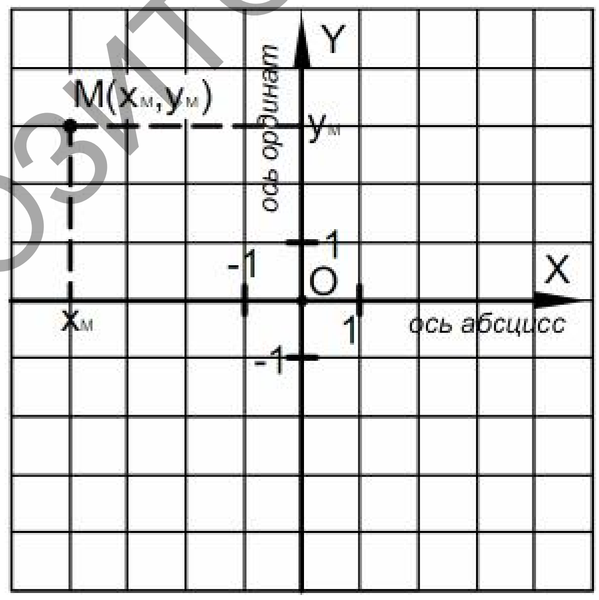


Рис. 1. Декартова система координат на плоскости

Каждой точке *M* плоскости *OXY* поставим в соответствие пару чисел (x_M, y_M) по следующему правилу: через точку *M* проведем прямую, параллельную оси *OY*, которая пересечет ось абсцисс *OX* в точке с координатой x_M (рис. 1). Число x_M называется *абсциссой* точки *M*. Аналогично через точку *M* проведем прямую, параллельную оси *OX*, которая пересечет ось ординат *OY* в точке с координатой y_M (рис. 1). Число y_M называется *ординатой* точки *M*. Пара чисел (x_M, y_M) представляет собой *декартовы координаты* точки *M* относительно выбранных осей координат. Координаты точки *M* записываются в круглых скобках рядом с буквенным обозначением точки $M(x_M, y_M)$.

Аналогично построим *декартову прямоугольную систему координат в пространстве*. Выберем в пространстве точку *O* – начало отсчета и проведем через нее три попарно перпендикулярные прямые *OX, OY, OZ*. На каждой из прямых обозначим положительную (стрелкой) и отрицательную (без стрелки) полуоси. Вдоль каждой из осей выберем масштабную единицу. Плоскость, проходящая через оси *OX, OY*, снабженная декартовой системой координат (рис. 2), называется координатной плоскостью *OXY*. Плоскость, проходящая через оси *OX, OZ*, снабженная декартовой системой координат (рис. 2), называется координатной плоскостью *OXZ*. Плоскость, проходящая через оси *OY, OZ*, снабженная декартовой системой координат (рис. 2), называется координатной плоскостью *OYZ*. Набор объектов: начало отсчета *O*, координатные оси *OX, OY, OZ* вместе с единицей измерения длины и координатные плоскости *OXY, OXZ, OYZ* – представляют собой *декартову систему координат OXYZ в пространстве*.

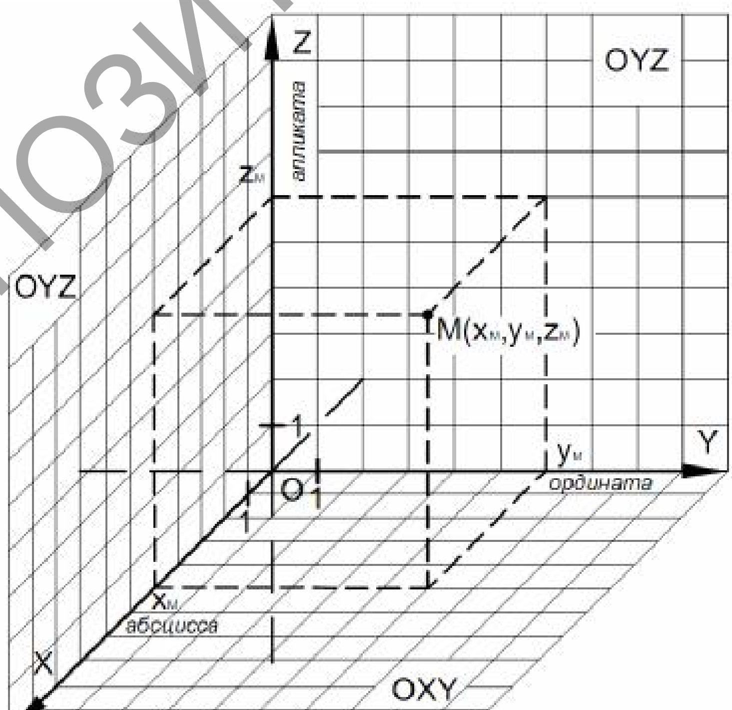


Рис. 2. Декартова система координат в пространстве

Каждой точке M пространства поставим в соответствие тройку чисел (x_M, y_M, z_M): проведем через точку M плоскость, параллельную координатной плоскости OYZ (рис. 2), которая пересекает ось OX в точке с координатой x_M, называемой *абсциссой* точки M. Аналогично определяются координаты y_M и z_M точки M, называемые соответственно *ординатой* и *аппликатой* точки M. Точка M со своими координатами записывается: $M(x_M, y_M, z_M)$.

Найдем расстояние между двумя точками. Пусть на плоскости OXY даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Пусть $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Проведем через точки M_1 и M_2 прямые, параллельные осям координат OY и OX соответственно (рис. 3). Пусть M – точка пересечения этих прямых, тогда

$$MM_1 = |y_1 - y_2|,\ MM_2 = |x_2 - x_1|.$$

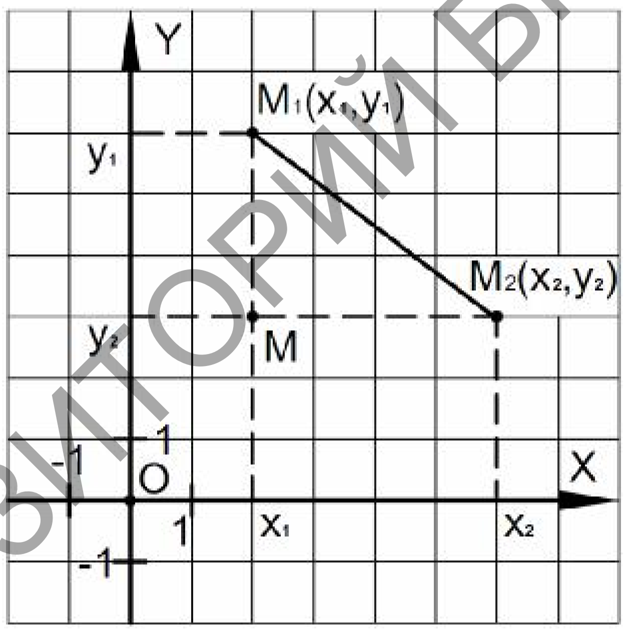


Рис. 3. Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ равно длине гипотенузы M_1M_2 прямоугольного треугольника M_1MM_2. По теореме Пифагора $M_1M_2 = \sqrt{MM_1^2 + MM_2^2}$. Выразив гипотенузу M_1M_2 через координаты точек M_1 и M_2, получим:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Применив рассуждения, аналогичные изложенным выше, можно найти расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в пространстве:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Упражнения 3.1

1. Среди точек $A(2, 1, 4)$, $B(-1, 0, 3)$, $C(1, -2, 3)$ укажите две наиболее удаленные друг от друга.

2. Найти площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(-2, 3)$, $B(-2, 7)$, $C(4, 3)$.

3. Найти периметр треугольника, вершинами которого являются точки $A(2, 3)$, $B(-4, 8)$, $C(-1, 5)$.

4. Найти координаты точек, симметричных точкам $A(2, 3)$, $B(-3, 2)$, $C(-1, 1)$, $D(-3, -5)$, $E(-4, -6)$, $F(a, b)$: а) относительно оси OX; б) относительно оси OY.

5. Найти координаты точек, симметричных точкам $A(3, 3)$, $B(2, -4)$, $C(2, 1)$, $D(5, -3)$, $E(-5, -4)$, $F(a, b)$ относительно начала отсчета.

Тест

1. Какая из точек со своими координатами задает точку плоскости: а) $A(2)$, б) $B(1, 2)$, в) $C(1, 2, 3)$, г) $D(1, 2, 3, 4)$, д) $E(1, 2, 3, 4, 5)$?

2. Какая из точек со своими координатами задает точку трехмерного пространства: а) $A(2)$, б) $B(1, 2)$, в) $C(1, 2, 3)$, г) $D(1, 2, 3, 4)$, д) $E(1, 2, 3, 4, 5)$?

3. Расстояние между точками $M_1(0, 0)$ и $M_1(-1, -1)$ равно: а) 1, б) 2, в) -2, г) $\sqrt{2}$, д) $\sqrt{2}$.

4. Расстояние от начала координат до точки $M_1(-1, 0, -1)$ равно: а) 1, б) 2, в) -2, г) $\sqrt{2}$, д) $\sqrt{2}$.

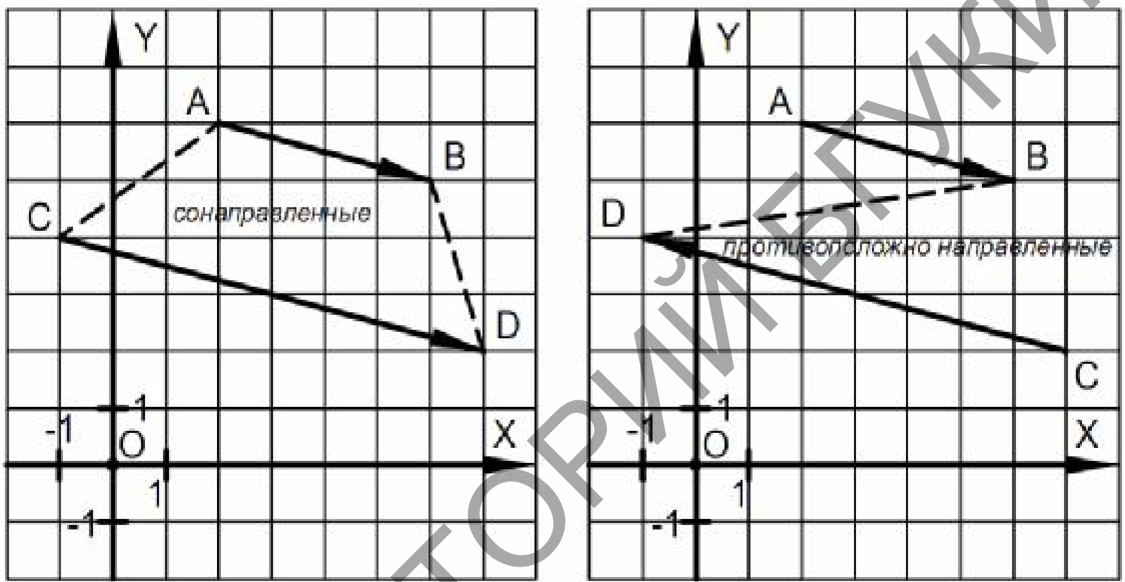
5. Расстояние от точки $M_1(6, 2)$ до оси OX равно: а) 2, б) 6, в) $\sqrt{40}$, г) 8, д) 4.

3.2. Вектор

Пусть на плоскости (в пространстве) даны две произвольные точки A и B. Если они не совпадают, то задают некоторый *ненулевой отрезок*. Возьмем точку A в качестве *начала*, а точку B – в качестве *конца* отрезка. Такой отрезок AB называется *направленным отрезком* и обозначается $\overrightarrow{AB}$. Если A и B совпадают, направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *нулевым* и обозначается 0.

Длина направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, обозначаемая $|\overrightarrow{AB}|$, есть длина одноименного ненаправленного отрезка AB. Число $|\overrightarrow{AB}|$ называют также *модулем* направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$.

Ненулевые направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на параллельных прямых, называются *сонаправленными*, если фигура $ABDC$ – трапеция или параллелограмм (рис. 4а), и *противоположно направленными*, если $ABDC$ не является четырехугольником (рис. 4б). Нулевой отрезок считается сонаправленным любому направленному отрезку.



а) сонаправленные б) противоположно направленные

Рис. 4 Направленные отрезки

Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *равными*, или *эквивалентными*, если они сонаправлены и длины их равны. Все нулевые направленные отрезки считаются равными.

Множество всех равных между собой направленных отрезков называется *вектором* (плоскости или пространства) (рис. 5). Если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ порождает вектор $\vec{a}$, пишут $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. *Длина вектора* $\vec{a}$ есть длина любого из порождающих его отрезков.

Два вектора, лежащие на параллельных прямых или одной и той же прямой называются *коллинеарными*. Два ненулевых вектора, лежащие на перпендикулярных прямых, называются *перпендикулярными* или *ортогональными*. Нулевой вектор можно считать ортогональным любому вектору.

Геометрической проекцией вектора $\vec{a}$ на ось OX называется вектор $\overrightarrow{a_X}$, где точки начала и конца вектора $\overrightarrow{a_X}$ являются соответственно проекциями точек начала и конца вектора $\vec{a}$ на ось OX (рис. 6). *Алгебраической проекцией* x_a вектора $\vec{a}$ на ось OX называется длина вектора $\overrightarrow{a_X}$, взятая со знаком плюс или минус, в зависимости от того, совпадает ли направление вектора $\overrightarrow{a_X}$ с положительным направлением оси OX или противоположно ему. Аналогично вводятся понятия геометрической проекции $\overrightarrow{a_Y}$ и алгебраической проекции y_a вектора $\vec{a}$ на ось OY. *Координаты вектора* $\vec{a}$ суть его алгебраические проекции на оси OX и OY соответственно. Вектор со своими координатами записывается $\vec{a}(x_a, y_a)$. Координаты нулевого вектора равны нулю. Вектор с началом в точке $A(x_A,y_A)$ и концом в точке $B(x_B,y_B)$ имеет координаты $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

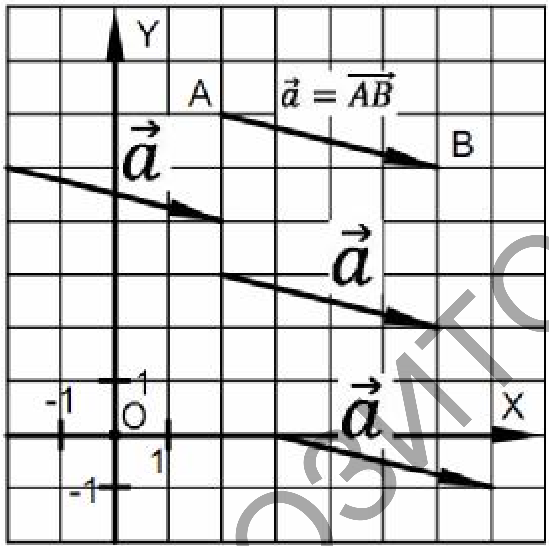


Рис. 5. Вектор

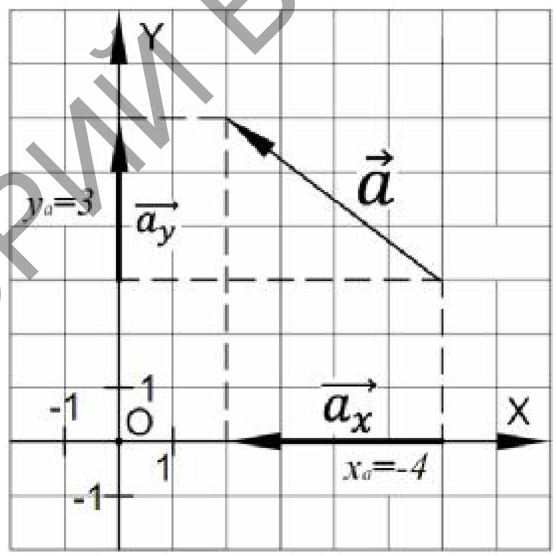


Рис. 6. Координаты вектора

Утверждение. Два вектора *равны* тогда и только тогда, когда их координаты соответственно равны.

Понятие вектора и связанные с ним определения обобщаются на случай пространства.

Длина вектора $\vec{a}(x_a, y_a)$ *на плоскости* находится по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2},$$

длина вектора $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ *в пространстве* по формуле:

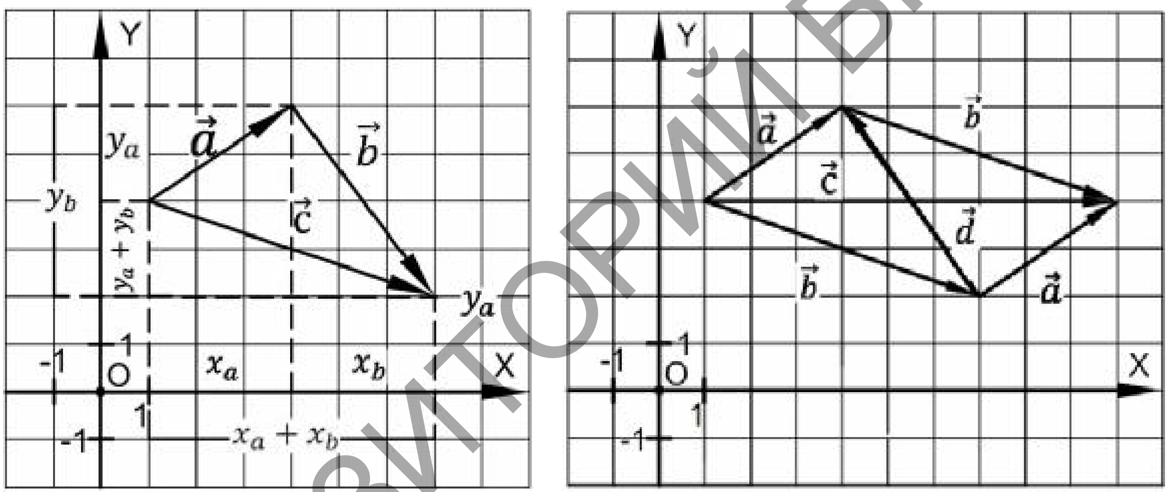
$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}.$$

Над векторами вводятся следующие *арифметические операции*: сложение, вычитание и умножение на число.

Сначала рассмотрим построение суммы и разности векторов *по правилу треугольника*. *Суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$, таких, что начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$, является вектор $\vec{c}$ ($\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$), начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец с концом вектора $\vec{b}$ (рис. 7). *Разностью векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{d}$ ($\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$), такой, что $\vec{a} = \vec{d} + \vec{b}$.

Сумму и разность векторов можно построить также по *правилу параллелограмма*.

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, начала которых совмещены, является вектор $\vec{c}$ с тем же началом, совпадающий с диагональю параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 7).



Правило треугольника Правило параллелограмма

Рис. 7. Сумма векторов

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, начала которых совмещены, является вектор $\vec{d}$, совпадающий с диагональю параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, начало находится в конце вектора $\vec{b}$, а конец - в конце вектора $\vec{a}$ (рис. 7).

Координаты вектора $\vec{c}$ *– суммы векторов* $\vec{a}(x_a, y_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b)$ – равны сумме одноименных координат этих векторов (рис. 7): $\vec{c}(x_a + x_b, y_a + y_b)$, а *координаты вектора* $\vec{d}$ *– разности* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – равны разности одноименных координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{d}(x_a - x_b, y_a - y_b)$.

Пример. На рисунке 7 изображен вектор $\vec{a}(3,\ 2)$ и вектор $\vec{b}(3, -4)$. Вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ имеет соответственно координаты $\vec{c}\big(3+3,\ 2+(-4)\big) = \vec{c}(6,\ -2)$.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на действительное число $k \neq 0$ (множитель) называется такой вектор $\vec{p} = k\vec{a}$ (произведение), длина которого равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на модуль числа k, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $k > 0$, и противоположно ему, если $k < 0$ (рис. 8). Если $k = 0$, то произведение – нулевой вектор.

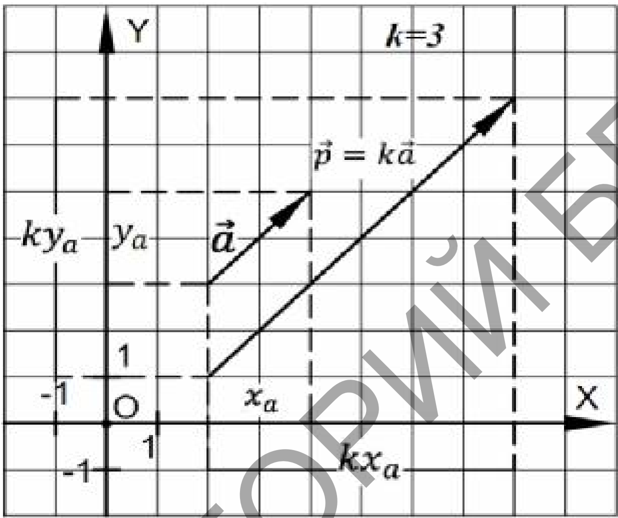


Рис. 8. Произведение вектора на число

Если $\vec{a}(x_a,\ y_a)$ и $\vec{p} = k\vec{a}$, тогда координаты вектора $\vec{p}$ вычисляются как произведение одноименных координат вектора $\vec{a}$ на число k: $\vec{p}(kx_a,\ ky_a)$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Свойства операций над векторами

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы, а k ,m – произвольные действительные числа, тогда:

1. Свойства нулевого вектора: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, $\vec{a} + (\overrightarrow{-a}) = \vec{0}$.

2. Перестановочное свойство: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $k\vec{a} = \vec{a}k$.

3. Свойства сочетательности: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$.

4. Свойство распределительности по отношению к числовому множителю: $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$.

5. Свойство распределительности по отношению к векторному множителю: $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Условие коллинеарности вектров. Всякий вектор $\vec{b}$, коллинеарный ненулевому вектору $\vec{a}$, можно представить единственным образом в виде произведения вектора $\vec{a}$ на некоторое число k: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Коллинеарные векторы обозначают $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Таким образом, коллинеарные векторы могут иметь либо одинаковое направление – *сонаправленные векторы*, либо противоположное – *противоположно направленные векторы*. Нулевой вектор принято считать коллинеарным с любым вектором.

Условие коллинеарности двух векторов $\overrightarrow{a}(x_a, y_a)$ и $\overrightarrow{b}(x_b, y_b)$ на плоскости может быть записано в виде условия пропорциональности соответствующих координат:

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = k.$$

В пространстве векторы называются *компланарными*, если они лежат на параллельных или совпадающих плоскостях (т.е. если они параллельны одной плоскости).

Углом между любыми двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между порождающими их направленными отрезками с общим началом. На рисунке 9 углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является угол $\angle BAC = \varphi$ между направленными отрезками $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

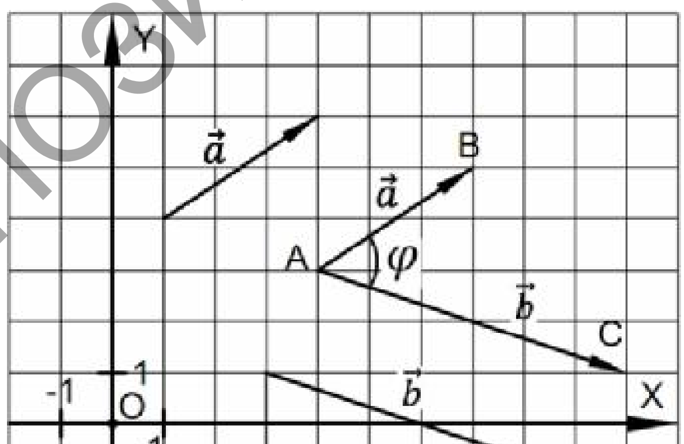


Рис. 9. Угол между векторами

Скалярным произведением вектора $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ называется действительное число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi.$$

Скалярное произведение векторов обозначают также $(\vec{a},\ \vec{b})$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то угол между ними равен нулю (в частности, если один из векторов или оба нулевые, угол между ними будем считать равным нулю). Если векторы противоположно направлены, то величина угла между векторами равна 180°.

В прямоугольной системе координат на плоскости скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_a,\ y_a)$ и $\vec{b}(x_b,\ y_b)$ выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b,$$

в пространстве соответственно формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b.$$

Таким образом, приравняв два выражения скалярного произведения векторов $\vec{a}(x_a,\ y_a)$ и $\vec{b}(x_b,\ y_b)$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = x_a x_b + y_a y_b,$$

легко получить формулу для нахождения *косинуса угла между двумя векторами* на плоскости

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}\,\sqrt{x_b^2 + y_b^2}},$$

и в пространстве

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\,\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}.$$

Поскольку $\cos(90^\circ) = 0$, справедливо следующее утверждение:

Условие перпендикулярности векторов. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Для перпендикулярных ветров принято обозначение: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Свойства скалярного произведения

1. Переместительное свойство: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. Распределительное свойство: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
3. Сочетательное свойство относительно скалярного множителя: $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{b} \cdot \vec{a})$.
4. Скалярный квадрат вектора есть квадрат его модуля:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

5. Скалярное произведение коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} \parallel \vec{b}$) равно произведению их длин, если векторы сонаправлены: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ - и произведению длин этих векторов с отрицательным знаком, если они противоположно направлены: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Упражнения 3.2

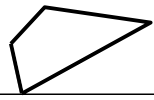
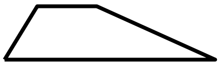
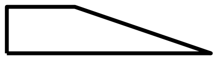
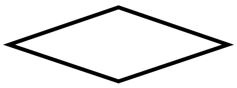
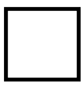
1. Найти угол между двумя векторами: а) $\vec{p}(2,\ 3), \vec{q}(-2, 7)$, б) $\vec{n}(1,\ 3,\ 1), \vec{m}(2,\ 0,\ 1)$.

2. Даны векторы $\vec{m}(-1, -3)$ и $\vec{n}(4,\ 2)$. Построить векторы: 1) $\vec{m} + \vec{n}$, 2) $\vec{m} - \vec{n}$, 3) $\vec{n} - \vec{m}$, 4) $-\vec{m} - \vec{n}$.

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, причем $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$. Определить $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

4. Доказать справедливость тождества и выяснить его геометрический смысл: $(\vec{m} + \vec{n})^2 + (\vec{m} - \vec{n})^2 = 2(\vec{m}^2 + \vec{n}^2)$.

5. Не осуществляя построение на координатной плоскости, установить, вершинами каких фигур 1) – 8) являются точки а) – з). Проверить полученный результат построением.

а) $A(2, -4)$, $B(-2, 2)$, $C(1, 3)$, $D(3, 0)$	1) четырехугольник 
б) $A(7, 2)$, $B(2, 4)$, $C(4, 9)$, $D(9, 7)$	2) трапеция; 
в) $A(2, -5)$, $B(-2, 1)$, $C(1, 3)$, $D(3, 0)$	3) прямоугольная трапеция 
г) $A(2, -2)$, $B(-2, -1)$, $C(-3, 3)$, $D(1, 2)$	4) равнобокая трапеция 
д) $A(2, 2)$, $B(-4, 5)$, $C(-2, 9)$, $D(4, 6)$	5) параллелограмм 
е) $A(2, 2)$, $B(5, 5)$, $C(9, 5)$, $D(12, 2)$	6) ромб 
ж) $A(0, 3)$, $B(-4, 0)$, $C(-7, 1)$, $D(-3, 4)$	7) прямоугольник 
з) $A(1, -2)$, $B(-2, -5)$, $C(-3, -1)$, $D(-2, 3)$	8) квадрат 

Тест

1. Направленные отрезки $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{MN}$ таковы, что фигура $KLNM$ – параллелограмм. Какое из следующих утверждений является ложным: а) $\overrightarrow{KL} \perp \overrightarrow{MN}$, б) $\overrightarrow{KL} \parallel \overrightarrow{MN}$, в) $|\overrightarrow{KL}| = |\overrightarrow{MN}|$, г) $\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{MN} = \vec{0}$, д) $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN}$?

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны. Какое из следующих утверждений является ложным: а) $\vec{a} \parallel \vec{b}$, б) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, в) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2$, г) $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{a}$, д) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$?

3. Какие из нижеследующих векторов являются коллинеарными: а) $\vec{a}(2,\ 3)$ и $\vec{b}(3,\ 2)$, б) $\vec{a}(2,\ 3)$ и $\vec{b}(-2, -3)$, в) $\vec{a}(2,\ 3)$ и $\vec{b}(2, -3)$, г) $\vec{a}(2, 3)$ и $\vec{b}(-2, 3)$, д) $\vec{a}(2, 3)$ и $\vec{b}(-3, 2)$?

4. Какие из следующих векторов являются ортогональными: а) $\vec{a}(2,\ 3)$ и $\vec{b}(3,\ 2)$, б) $\vec{a}(2,\ 3)$ и $\vec{b}(-2, -3)$; в) $\vec{a}(2,\ 3)$ и $\vec{b}(2, -3)$, г) $\vec{a}(2,\ 3)$ и $\vec{b}(-2,\ 3)$, д) $\vec{a}(2,\ 3)$ и $\vec{b}(-3,\ 2)$?

5. Векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ противоположно направлены и $|\vec{m}| = |\vec{n}|$. Скалярное произведение векторов равно: а) $\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}|^2$, б) $\vec{m} \cdot \vec{n} = -|\vec{n}|^2$, в) $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$, г) $\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}||\vec{n}|$, д) $\vec{m} \cdot \vec{n} = 1$?

3.3. Прямая на плоскости

Любой ненулевой вектор, перпендикулярный данной прямой, называется *нормальным вектором прямой* или *вектором нормали*.

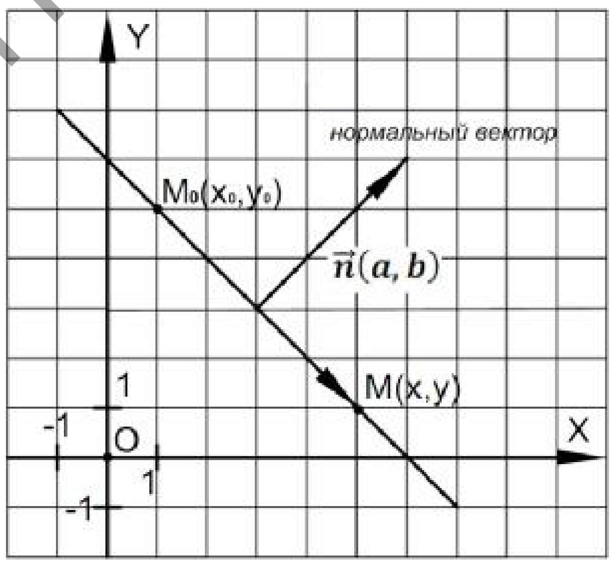


Рис.10. Нормальный вектор прямой

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ – точка прямой α, перпендикулярной ненулевому вектору $\vec{n}(a,\ b)$ (рис. 10). Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой α, тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0,\ y - y_0)$ перпендикулярен вектору $\vec{n}(a,\ b)$. Согласно утверждению о перпендикулярности векторов (см. п. 3.2): два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$a(x - x_0) + b(\ y - y_0) = 0.$$

Последнее равенство является *уравнением прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0)$, *с вектором нормали* $\vec{n}(a, b)$. Запишем его, раскрыв скобки и приведя подобные $ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$. Обозначив $c = -(ax_0 + by_0)$, получим *общее уравнение прямой*:

$$ax + by + c = 0.$$

В общем уравнении прямой числа a и b задают координаты *вектора нормали* $\vec{n}(a, b)$ (*нормального вектора прямой*).

Если в уравнении один из коэффициентов a, b или c обращается в нуль, то уравнение называется неполным:

1) $a = 0$ – прямая параллельна оси абсцисс (OX);
2) $b = 0$ – прямая параллельна оси ординат (OY);
3) $c = 0$ – прямая проходит через начало координат.

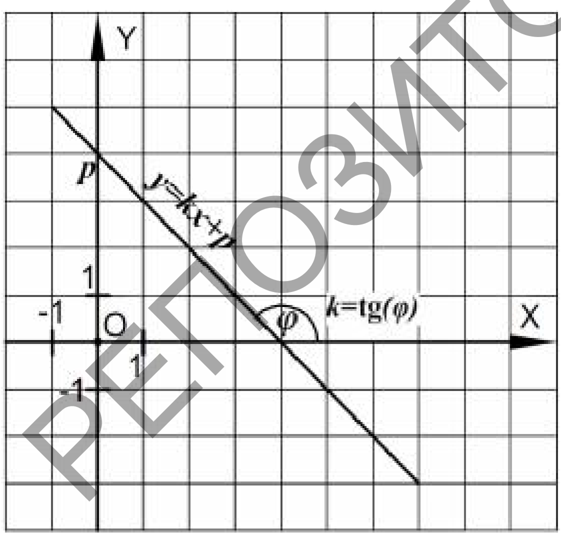


Рис. 11. Угловой коэффициент прямой

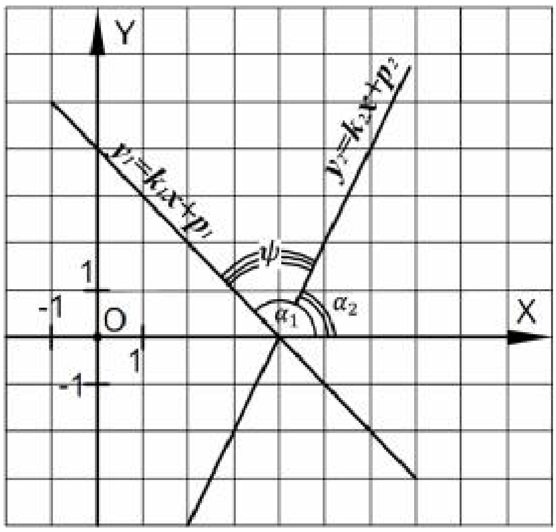


Рис. 12. Угол между прямыми

Разрешив общее уравнение прямой относительно y: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, обозначив $k = -\frac{a}{b}$ и $p = -\frac{c}{b}$, получим *уравнение прямой с угловым коэффициентом* k (рис. 11):

$$y = kx + p.$$

Коэффициент k равен *тангенсу угла наклона прямой к положительно направленной оси OX* ($k = \mathrm{tg}(\varphi)$). Свободный член p равен ординате точки пересечения прямой с осью OY.

Найдем *острый угол* ψ *между прямыми* $y_1 = k_1x + p_1$ и $y_2 = k_2x + p_2$. Пусть α_1 и α_2 – углы, образованные прямыми с положительно направленной осью OX соответственно, причем $\alpha_1 > \alpha_2$ (рис. 12). Тогда $\psi = \alpha_1 - \alpha_2$ и $tg(\psi) = (\alpha_1 - \alpha_2)$.

Воспользовавшись тригонометрической формулой тангенса разности двух углов

$$\mathrm{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\mathrm{tg}(\alpha_1) - \mathrm{tg}(\alpha_2)}{1 + \mathrm{tg}(\alpha_1)\mathrm{tg}(\alpha_2)}$$

и тем фактом, что $\mathrm{tg}(\alpha_1) = k_1$, а $\mathrm{tg}(\alpha_2) = k_2$, получим формулу *тангенса острого угла между двумя прямыми*

$$\mathrm{tg}(\psi) = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Тангенс ψ не существует, если $1 + k_1k_2 = 0$, то есть угол между прямыми равен $90°$, отсюда *условие перпендикулярности прямых* имеет вид: $k_1 = -1/k_2$. *Условие параллельности двух прямых* вытекает непосредственно из того, что $\mathrm{tg}(0) = 0$, а значит $k_1 - k_2 = 0$ и, следовательно, $k_1 = k_2$.

Ненулевой вектор, коллинеарный (параллельный) прямой, называется *направляющим вектором прямой* (рис. 13).

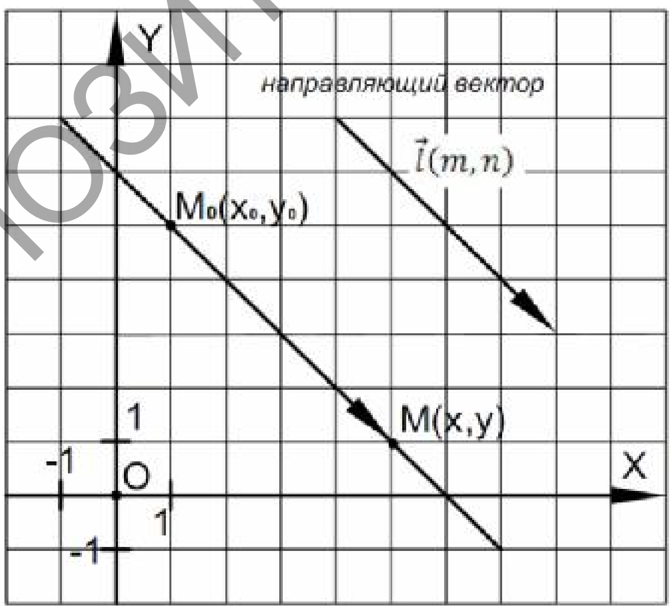


Рис.13. Направляющий вектор прямой

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ – точка прямой α, параллельной ненулевому вектору $\vec{l}(m, n)$ (рис. 13). Если $M(x, y)$ – произвольная точка прямой α, тогда векторы $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0,\ y - y_0)$

и $\vec{l}(m,n)$ коллинеарны, следовательно, их координаты пропорциональны, а значит, справедливо равенство

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n},$$

называемое *каноническим уравнением прямой*, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\vec{l}(m,n)$.

Взяв в качестве направляющего вектор, проходящий через точки прямой $M_1(x_1, y_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2)$, из последнего равенства получим *уравнение прямой, проходящее через две точки*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Замечание. Нормальный и направляющий векторы прямой определяются неоднозначно, с точностью до коллинеарности.

Упражнения 3.3

1. Определить точки пересечения прямой $2x - 3y + 12 = 0$ с координатными осями и построить эту прямую на чертеже.

2. Точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 расположены на прямой $y = 2x + 4$, их абсциссы соответственно равны числам 4, 0, 2, – 2, – 6. Определить ординаты этих точек.

3. Дана прямая $2x - 5y - 7 = 0$. Определить угловой коэффициент k прямой: а) параллельной данной прямой; б) перпендикулярной к данной прямой.

4. Дана прямая $3x + 2y - 2 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2, 1)$: а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.

5. Воспользовавшись каноническим уравнением прямой, вывести уравнение прямой, проходящей через две точки.

Тест

1. Которое из нижеследующих выражений задает прямую: а) $y^2 = 2x + 4$, б) $y = 2x^2 + 4$, в) $y = 2x + 4^2$, г) $y^2 = 2x^2 + 4$, д) $y^2 = 2x^2 + 4^2$?

2. Какой из следующих векторов перпендикулярен прямой $y - 2x - 4 = 0$: а) $\vec{n}(1, -2)$, б) $\vec{n}(-2, 1)$, в) $\vec{n}(1, -2, -4)$, г) $\vec{n}(-2, 1, -4)$, д) $\vec{n}(-1, 2)$?

3. Какой из векторов является направляющим вектором прямой, заданной уравнением $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{5}$: а) $\bar{l}(2, 3)$, б) $\bar{l}(8, 10)$, в) $\bar{l}(-2, -3)$, г) $\bar{l}(5, 4)$, д) (4, 5)?

4. Какая прямая проходит через начало координат: а) $y = 1$, б) $3x + 4y = 1$, в) $3x = 1$, г) $3x + 4y = 0$, д) $3x + 4y - 1 = 0$?

5. Тангенс угла наклона прямой $3x + 4y = 1$ к положительно направленной оси OX равен: а) 3, б) 4, в) $\frac{3}{4}$, г) $-\frac{3}{4}$, д) -3.

3.4. Кривые второго порядка

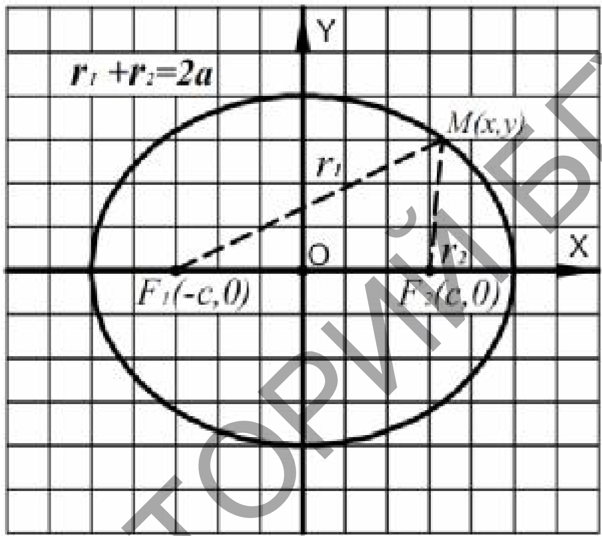


Рис. 14. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место всех точек $M(x, y)$, для которых сумма расстояний r_1 и r_2 до двух заданных точек $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, называемых *фокусами эллипса*, постоянна и равна $2a$: $r_1 + r_2 = 2a$ (рис. 14).

Для вывода уравнения эллипса воспользуемся формулой расстояния между двумя точками:

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$r_1 + r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Осуществим преобразования:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

возведем обе части равенства в квадрат

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2;$$

раскроем скобки и приведем подобные

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx;$$

возведем в квадрат снова и сгруппируем следующим образом

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Положим $a^2 - c^2 = b^2$ ($a > c$), тогда $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Разделив последнее равенство почленно на a^2b^2, получим *каноническое уравнение эллипса*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

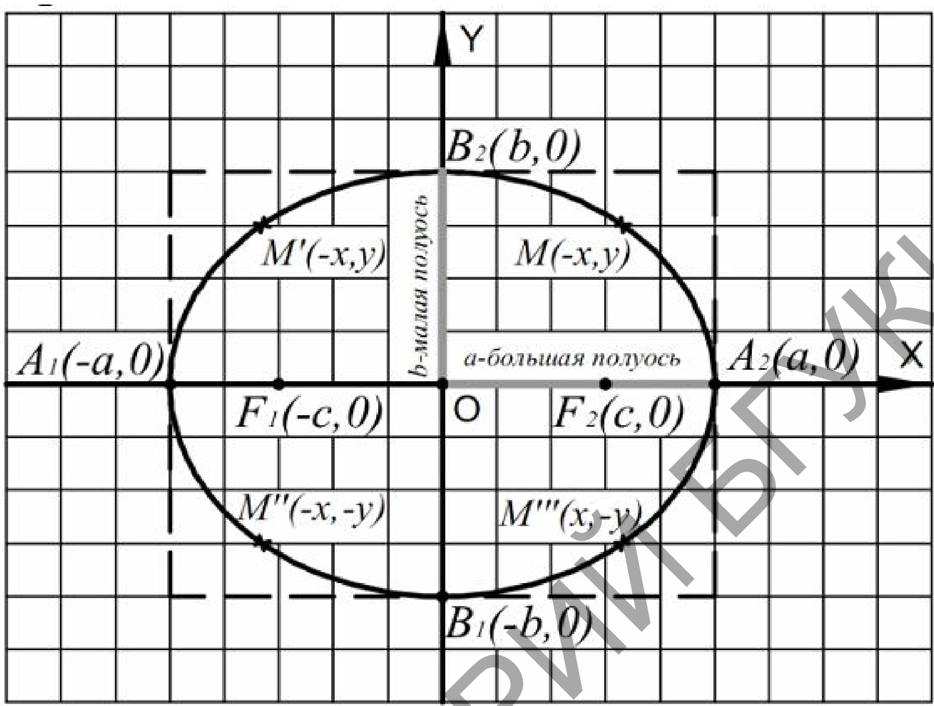


Рис. 15. Элементы эллипса

Элементами эллипса (рис. 15) являются: точка О – *центр эллипса*; точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ – *вершины эллипса*; точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – *фокусы эллипса*; $2c$ – *фокусное расстояние*, $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ – *большая и малая оси эллипса*; a *и* b – *большая и малая полуоси эллипса;* $e = c/a$ ($e < 1$) – *эксцентриситет эллипса*. Фокусное расстояние и эксцентриситет можно вычислить, воспользовавшись следующими формулами:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},\ e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Эксцентриситет определяется отношением осей эллипса и характеризует его форму: чем больше e, тем более вытянут эллипс вдоль большой оси (рис. 16).

Так как в каноническое уравнение эллипса координаты x и y входят во второй степени, то, если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, тогда и точки $M'(-x, y)$, $M''(x, -y)$, $M'''(-x, -y)$ также принадлежат этому эллипсу (рис. 15). Поэтому оси координат OX и OY являются *осями симметрии* для эллипса, заданного каноническим уравнением, а начало координат является его *центром симметрии*.

Из уравнения эллипса следует, что для координат любой его точки выполнены неравенства: $|x| \leq a,\ |x| \leq b$. Геометрически это означает, что эллипс расположен внутри прямоугольника (рис. 15), стороны которого определяются уравнениями: $x = \pm a, y = \pm b$.

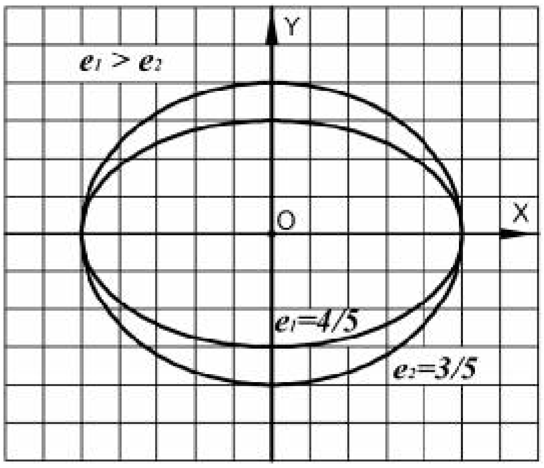


Рис. 16. Эксцентриситет

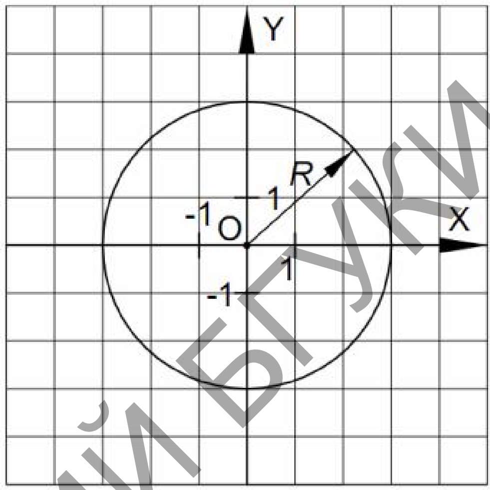


Рис. 17. Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек, удаленных на расстояние R от точки O, называемых *центром* и *радиусом* окружности (рис. 17) соответственно. Каноническое уравнение окружности можно получить из уравнения эллипса при $a = b = R$: $x^2 + y^2 = R^2$.

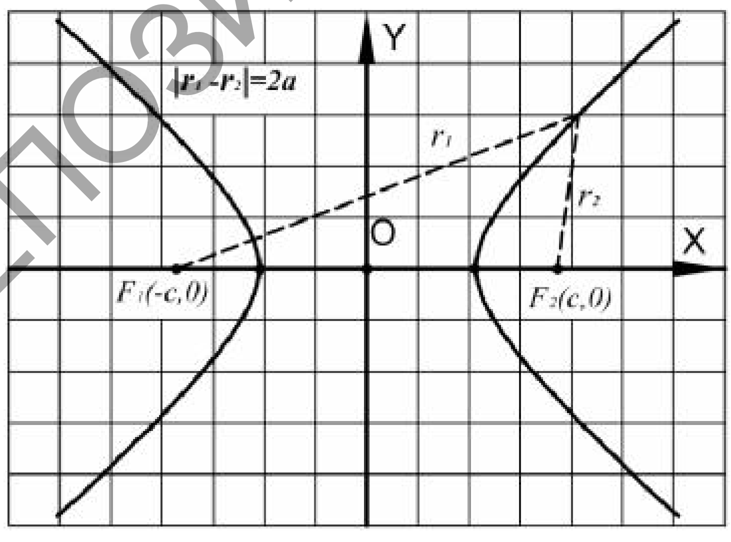


Рис. 18. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место всех точек $M(x, y)$, для которых абсолютная величина разности расстояний r_1 и r_2 до двух заданных точек $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, называемых *фокусами гиперболы*, постоянна и равна $2a$ ($2a < 2c$): $|r_1 - r_2| = 2a$ (рис. 18).

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Рассуждения для вывода канонического уравнения гиперболы аналогичны приведенным выше для вывода канонического уравнения эллипса.

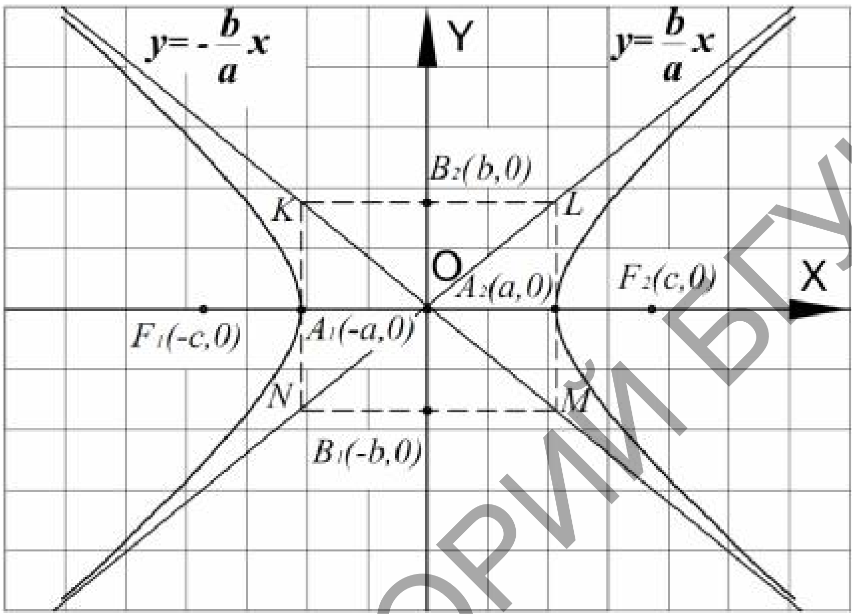


Рис. 19. Элементы гиперболы

Элементами гиперболы (рис. 19) являются: точка O – *центр гиперболы*; точки $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ – *вершины гиперболы*; точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ – *фокусы*; $2c$ – *фокусное расстояние*; $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ – *действительная и мнимая оси гиперболы*; $e = c/a$ ($e < 1$) – ***эксцентриситет гиперболы***. Фокусное расстояние и эксцентриситет гиперболы можно вычислить по следующим формулам:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};\ e = c/a = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

Эксцентриситет характеризует форму гиперболы: чем больше e, тем более вытянут основной прямоугольник гиперболы *KLMN* вдоль мнимой оси.

Асимптоты гиперболы – это прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при удалении в бесконечность. Уравнения асимптот гиперболы имеют вид:

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Для гиперболы, заданной каноническим уравнением, так же как и для эллипса, оси координат OX и OY являются *осями симметрии*, а начало координат –*центром симметрии*.

Параболой называется геометрическое место точек $M(x, y)$, равноудалённых от заданной точки $F(p/2, 0)$, называемой *фокусом* параболы и от данной прямой $x = -p/2$, называемой *директрисой* параболы (рис. 20). Выведем уравнение параболы.

Найдем расстояние FM: $FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$.

Расстояние MM' от точки $M(x, y)$ до прямой $x = -p/2$ равно $x + p/2$. Таким образом, получаем равенство

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \text{ или } \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим *каноническое уравнение параболы*

$$y^2 = 2px.$$

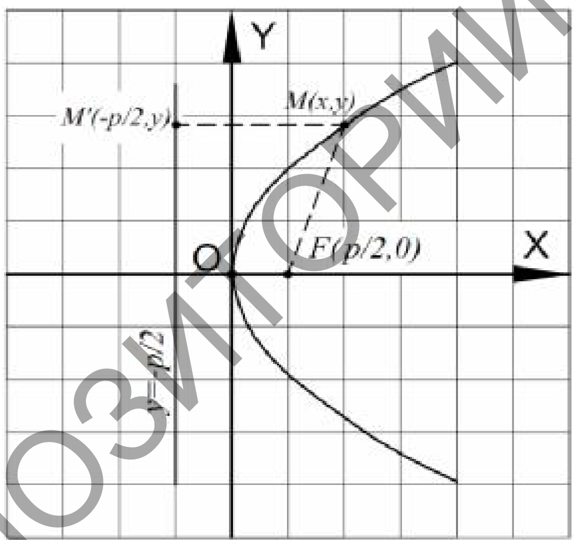


Рис. 20. Парабола

Элементами параболы являются: точка O – *вершина параболы*; OX – *ось параболы*; точка F $(p/2, 0)$ – *фокус параболы*; $x = -p/2$ – *уравнение директрисы параболы*; p – *фокальный параметр* (расстояние от фокуса до директрисы).

В общем случае *кривой второго порядка* называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$Ax^2 + Bxy + Cx^2 + Dx + Ey + F = 0, |A| + |B| + |C| \neq 0.$$

Однако с помощью переноса системы координат и поворота ее на некоторый угол можно добиться того, что в новой системе координат вышеупомянутое уравнение будет иметь вид одного из канонических уравнений кривых, рассмотренных в данном пункте.

Упражнения 3.4

1. Составить уравнение окружности, центр которой совпадает с точкой $C(4, -1)$, а ее радиус равен 5.

2. Записать уравнение эллипса, центр симметрий которого имеет координаты $(-2, 5)$, а большая и малая полуоси равны 6 и 3 соответственно.

3. Найти координаты фокусов гиперболы, заданной уравнением $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{16} = 1$.

4. Написать уравнение окружности с центром в начале координат, касающуюся гиперболы $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{16} = 1$ в ее вершинах.

5. Найти расположение относительно координатных осей, величину фокального параметра и уравнение директрисы парабол: а) $y^2 = 6x$, б) $x^2 = 7y$, в) $y^2 = -8x$, г) $x^2 = -9y$.

Тест

1. Эллипс задан уравнением $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Чему равна сумма расстояний $r_1 + r_2$ от любой точки эллипса до его фокусов F_1 и F_2: а) 3, б) 4, в) 8, г) 25, д) 6 ?

2. Радиус окружности $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$ равен: а) 16, б) 4, в) $\frac{1}{16}$, г) $\frac{1}{4}$, д) 1.

3. Какое из уравнений задает гиперболу: а) $\frac{x^2}{16} = 1 - \frac{y^2}{9}$, б) $16x^2 - 9y^2 = 1$, в) $\frac{x}{16} - \frac{y}{9} = 1$, г) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0$, д) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{-9} = 1$?

4. Какая прямая задает асимптоту гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$: а) $y = -\frac{2}{3}x$, б) $y = -\frac{3}{2}x$, в) $3y = 2x$, г) $y = -\frac{9}{4}x$, д) $y = \frac{4}{9}x$?

5. Какая из прямых задает директрису параболы $y^2 = 8x$: а) $x = -8$, б) $y = -4$, в) $x = -2$, г) $y = 4x$, г) $y = 8$?

3.5. Плоскость

Пусть в трехмерном пространстве задана декартова прямоугольная система координат $OXYZ$ (рис. 21). Пусть α – некоторая плоскость этого пространства, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}(A, B, C)$, называемому *нормальным вектором* или *вектором нормали* к плоскости α. На плоскости α рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M}$, где $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости α. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}$: $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

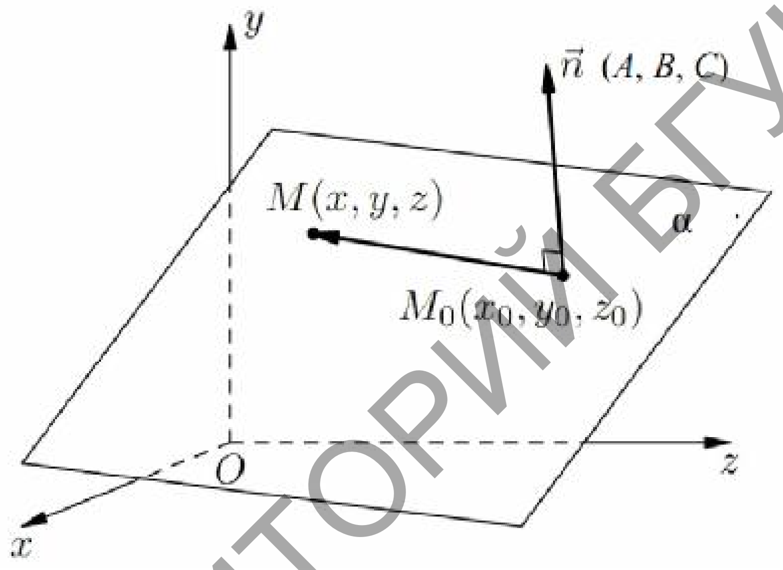


Рис. 21. Вектор нормали к плоскости

Вектор $\vec{n}(A, B, C)$ перпендикулярен к плоскости α, а значит, и вектору $\overrightarrow{M_0M}$, следовательно, скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ равно нулю:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Раскрыв скобки, приведя подобные и обозначив

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0),$$

получим *общее уравнение плоскости в пространстве:*

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, а *коэффициенты* A, B, C – координаты вектора нормали к плоскости α.

Расположение плоскости относительно системы координат:

1. $A = 0$, $B = 0$. Плоскость параллельна координатной плоскости OXY или совпадает с ней, если $D = 0$.

2. $B = 0$, $C = 0$. Плоскость параллельна координатной плоскости OYZ или совпадает с ней, если $D = 0$.

3. $A = 0$, $C = 0$. Плоскость параллельна координатной плоскости OXZ или совпадает с ней, если $D = 0$.

4. $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Плоскость параллельна оси OX или проходит через нее, если $D = 0$.

5. $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$. Плоскость параллельна оси OY или проходит через нее, если $D = 0$.

6. $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Плоскость параллельна оси OZ или проходит через нее, если $D = 0$.

7. $D = 0$. Плоскость проходит через начало координат.

Взаимное расположение двух плоскостей:

$$\alpha_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\alpha_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

1. Плоскости α_1 и α_2 перпендикулярны ($\alpha_1 \perp \alpha_2$) тогда и только тогда, когда $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

2. Плоскости α_1 и α_2 параллельны ($\alpha_1 \parallel \alpha_2$) тогда и только тогда, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 пропорциональны: $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$ при $\lambda \neq 0$ и $D_1 \neq \lambda D_2$.

3. Плоскости α_1 и α_2 совпадают ($\alpha_1 = \alpha_2$) тогда и только тогда, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 пропорциональны: $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$, $D_1 = \lambda D_2$ при $\lambda \neq 0$.

Если все коэффициенты не равны нулю, свойство 2 (свойство 3) можно записать в виде равенств:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \left(= \frac{D_1}{D_2}\right) = \lambda.$$

Углом φ между пересекающимися плоскостями в пространстве называется величина меньшего из двугранных углов, образованных данными плоскостями. Угол между параллельными или между совпадающими плоскостями считается равным 0^o (рис. 22). Угол φ между пересекающимися несовпадающими плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ равен углу ψ между нормальными векторами $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ либо углу $180^o - \psi$. Таким образом, $\cos(\varphi)$ равен абсолютной величине косинуса угла между нормалями ($\cos(\varphi)=|\cos(\psi)|$) и может быть найден из скалярного произведения векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$$\cos(\varphi) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

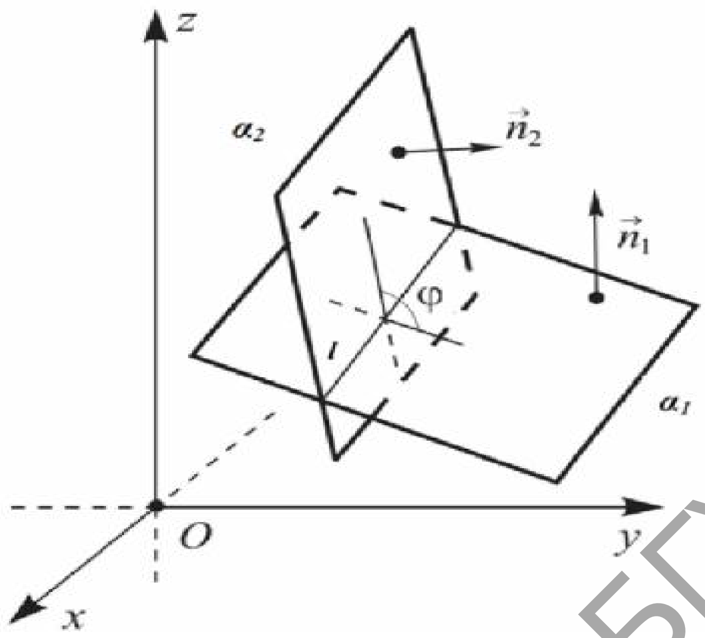


Рис. 22. Угол между плоскостями

В качестве справочной информации приведем формулу вычисления расстояния d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Прямая l в пространстве есть пересечение двух плоскостей (рис. 22) и в декартовой системе координат может быть задана их уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Упражнения 3.5

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 3, -2)$, параллельную плоскости $3x - 2y - z + 2 = 0$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 3, -2)$, перпендикулярную плоскости $3x - 2y - z + 2 = 0$.

3. Не используя формулу вычисления расстояния от точки до плоскости, установить, какая из точек $A(3, 4, 7)$, $B(3, -4, -7)$, $C(-3, 4, -7)$ находится от плоскости $y + 2 = 0$ на наименьшем расстоянии. Чему равно это расстояние?

4. Не используя формулу вычисления косинуса угла между плоскостями, найти угол между плоскостями $-y + z + 2 = 0$ и $y + z - 4 = 0$.

5. Привести уравнения двух не совпадающих и не параллельных между собой плоскостей, ортогональных плоскости $x + z - 4 = 0$.

Тест

1. Которое из следующих выражений задает плоскость: а) $2(x - 3) + 3(y - 2) = 0$, б) $2x = 4y = 5z$, в) $4(x - 2)^2 + 9y^2 = 0$, г) $\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ 2x + 3y + 4z + 5 = 0, \end{cases}$ д) $(2x + 3y + 4z + 5)^{-1} = 0$?

2. Вектор нормали к плоскости $5x - 2z + 1 = 0$ имеет координаты: а) (5, 2, 1), б) (5, 0, –2,), в) (5, 2), г) (5, –2), д) (5, 0).

3. Какая из плоскостей проходит через начало координат: а) $2x + y = 0$, б) $4x + 2 = 0$, в) $4x + 2y + 6z = 1$, г) $3z + 1 = 0$, д) $4y + 2x + 6z + 2 = 0$?

4. Укажите плоскость, параллельную $2x + y + 3z + 1 = 0$: а) $2x + y = 0$, б) $4x + 6z + 2 = 0$, в) $4x + 2y + 6z = 0$, г) $3z + 1 = 0$, д) $4y + 2x + 6z + 2 = 0$.

5. Укажите плоскость, перпендикулярную $2x + y + 3z + 1 = 0$: а) $2x - y = 0$, б) $-x + 2y - z + 3 = 0$, в) $4y + 2x + 6z + 2 = 0$, г) $1 + 3z + y + 2x = 0$, д) $2y - x = 0$.

3.6. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называют геометрическое место точек с координатами, удовлетворяющими уравнению $A_{11}x^2 + A_{22}x^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz + 2A_{14}x + 2A_{24}y + 2A_{34}z + 2A_{44} = 0$, $|A_{11}| + |A_{22}| + |A_{33}| + |A_{12}| + |A_{13}| + |A_{23}| \neq 0$.

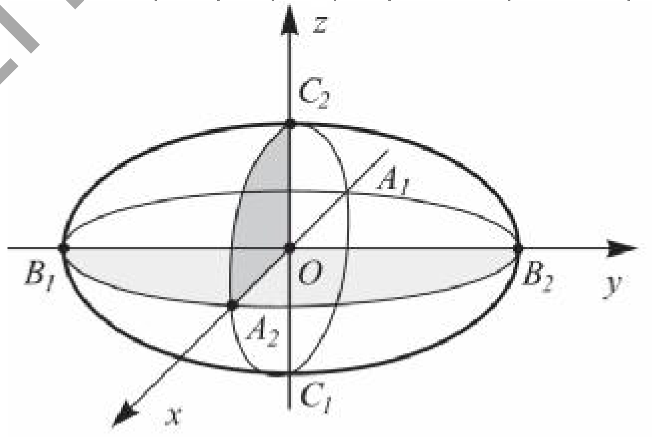


Рис. 23. Эллипсоид

Эллипсоид – поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c>0.$$

Построим сечение эллипсоида плоскостью OXY. Подставим в уравнении эллипсоида z = 0 и получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

которое является уравнением эллипса в плоскости OXY (на рис. 23 эллипс с вершинами A_1, B_1, A_2, B_2). Аналогично, подставив в уравнение эллипсоида x = 0 для OYZ и y = 0 для OXZ, можно установить, что сечениями эллипсоида плоскостями OYZ и OXZ также являются эллипсы (на рис. 23 эллипсы с вершинами C_1, B_1, C_2, B_2 и A_1, C_1, A_2, C_2 соответственно).

Построим сечения эллипсоида плоскостями $z = h$ ($|h| < c$). Подставим в уравнение эллипсоида $z = h$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}\,,\Rightarrow \frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1.$$

Последнее равенство является в плоскости $z = h$ уравнением эллипса. Аналогично можно рассмотреть сечения эллипсоида плоскостями $x = h$ ($|h| < a$) и $y = h$ ($|h| < b$).

Каждая из координатных плоскостей является *плоскостью симметрии эллипсоида*, заданного каноническим уравнением, а начало координат – его *центром симметрии*.

При $a = b = c$ уравнение эллипсоида определяет *сферу радиуса* $R = a$ с *центром* в начале отсчета, каноническое уравнение которой имеет вид: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Однополостный гиперболоид – поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \ a,b,c>0\ .$$

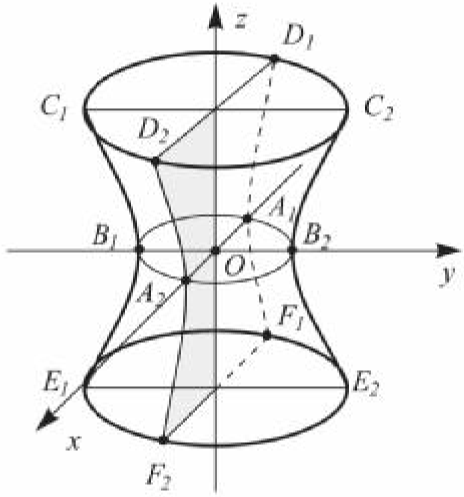


Рис. 24. Однополостный гиперболоид

Проведя рассуждения, аналогичные изложенным выше для исследования формы эллипсоида, исследуем форму гиперболоида с помощью построения его сечений: сечениями плоскостями $z = h$, в том числе и плоскостью OXY ($z = 0$), являются эллипсы (на рис. 24 эллипсы с вершинами C_1, D_1, C_2, D_2 и E_1, F_1, E_2, F_2, а также эллипс A_1, B_1, A_2, B_2 для $z = 0$), канонические уравнения которых в соответствующих плоскостях имеют вид

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ для } z=0;$$

сечениями плоскостями $y = h$ ($|h| < b$), в том числе и плоскостью OXZ ($y = 0$), являются гиперболы (на рис. 24 гипербола с ветвями, проходящими через точки F_1, A_1, D_1 и F_2, A_2, D_2 для $y = 0$), канонические уравнения которых в соответствующих плоскостях имеют вид

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}=1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ для } y=0;$$

сечениями плоскостями $x = h$ ($|h| < a$), в том числе и плоскостью OYZ ($x = 0$), являются гиперболы (на рис. 24 гипербола с ветвями, проходящими через точки C_1, B_1, E_1 и C_2, B_2, E_2 для $x = 0$), канонические уравнения которых в соответствующих плоскостях имеют вид

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}=1 \text{ и } \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ для } x=0.$$

Для однополостного гиперболоида, заданного каноническим уравнением, каждая из координатных плоскостей является *плоскостью симметрии*, а начало координат – *центром симметрии*.

Гиперболический параболоид (седло) – поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p > 0,\ q > 0).$$

Исследуем форму гиперболического параболоида с помощью сечений: сечением плоскостью OYZ ($x = 0$) является парабола (на рис. 25 она проходит через точки B_1, O, B_2), уравнение которой в плоскости OYZ имеет вид $y^2 = -2qz$; сечением плоскостью OXZ ($y = 0$) является парабола (на рис. 25 она проходит через точки A_1, O, A_2), уравнение которой в OXZ имеет вид $x^2 = 2pz$; сечения плоскостями $x = h$ представляют собой параболы (на рис. 25 параболы, проходящие через точки C_1, A_1, P_1 и C_2, A_2, D_2, которые получаются параллельным переносом параболы, проходящей через точки B_1, O, B_2, вдоль параболы, проходящей через A_1, O, A_2), уравнения которых в соответствующих плоскостях имеют вид

$$y^2 = -2qz + h^2 q / p \;;$$

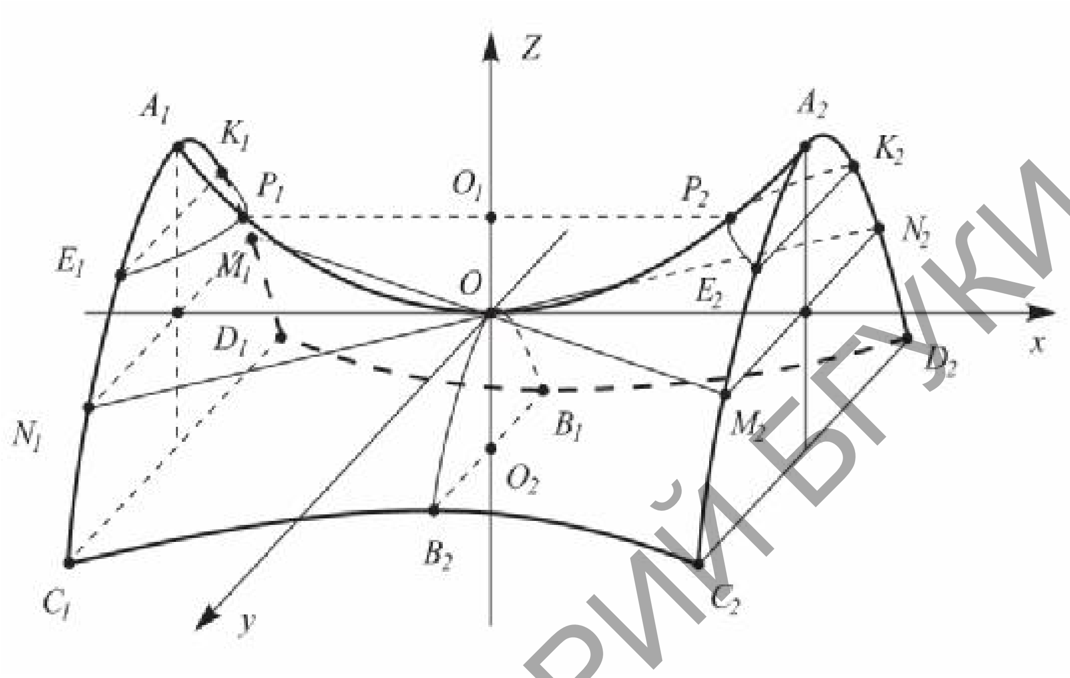


Рис. 25. Гиперболический параболоид

сечения плоскостями $y = h$ представляют собой параболы (получающиеся (рис. 25) параллельным переносом параболы, проходящей через точки A_1, O, A_2, вдоль параболы, проходящей через B_1, O, B_2), уравнения которых в соответствующих плоскостях имеют вид

$$x^2 = 2pz - h^2 p / q;$$

плоскость OXY ($z = 0$) дает в сечении пару прямых (на рис. 25 прямые M_1M_2 и N_1N_2) с уравнениями

$$y = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}x;$$

плоскости $z = l$ ($l > 0$) пересекают гиперболический параболоид по гиперболам (на рис. 25 гипербола с ветвями, проходящими через точки K_1, P_1, E_1 и K_2, P_2, E_2), имеющим в соответствующих плоскостях уравнения

$$\frac{x^2}{2pl} - \frac{y^2}{2ql} = 1;$$

Плоскости $z = -m$ ($m < 0$) пересекают гиперболический параболоид по гиперболам (на рис. 25 гипербола с ветвями, проходящими через точки D_1, B_1, D_1 и C_2, B_2, C_2) , имеющим в соответствующих плоскостях уравнения

$$\frac{y^2}{2qm} - \frac{x^2}{2pm} = 1.$$

Координатные плоскости *OXY* и *OYZ* являются плоскостями симметрии гиперболического параболоида. Центра симметрии эта поверхность не имеет.

Конус второго порядка – поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид (рис. 26):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Для гиперболоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ конус является *асимптотическим*. По отношению к нему конус играет такую же роль, как асимптоты по отношению к гиперболе (рис. 27).

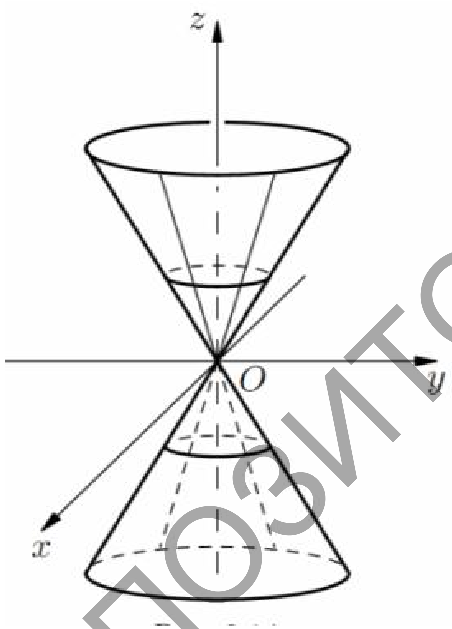


Рис. 26. Конус

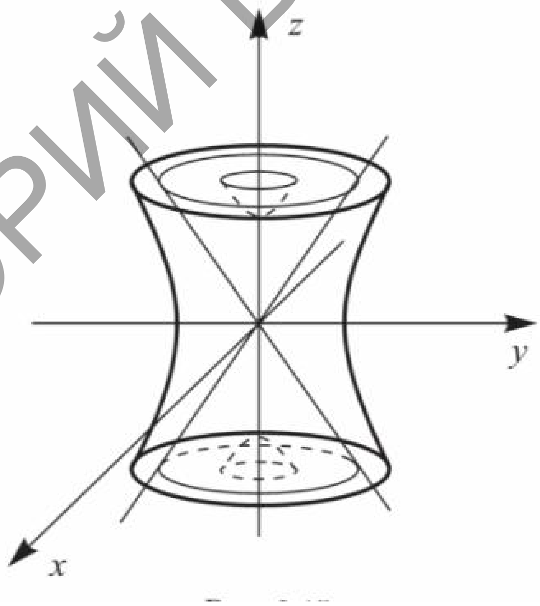


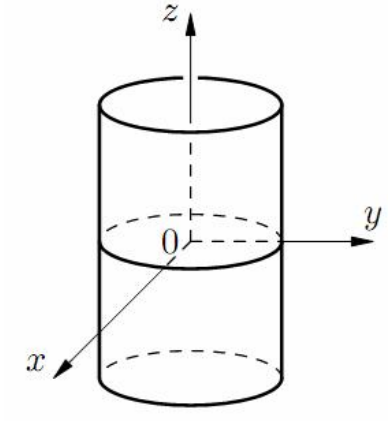
Рис. 27. Асимптотический конус для однополостного гиперболоида

Цилиндры второго порядка – поверхности, канонические уравнения которых имеют вид:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллиптический цилиндр (рис. 28);

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гиперболический цилиндр (рис. 29);

3) $x^2 = py$ – параболический цилиндр (рис. 30).



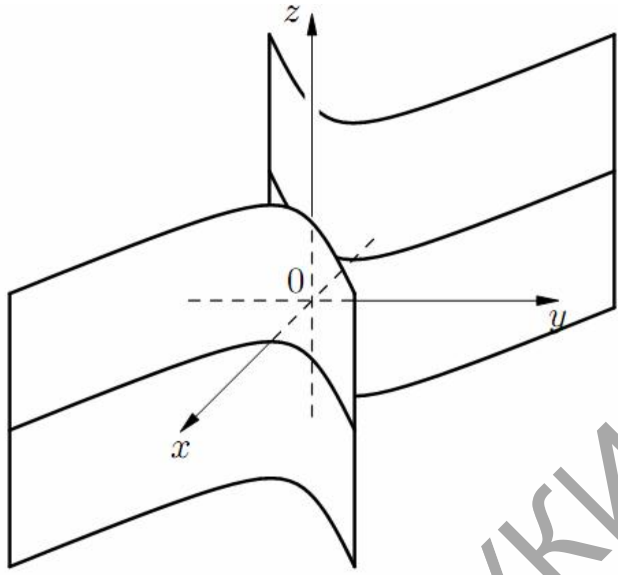


Рис. 28. Эллиптический цилиндр Рис. 29. Гиперболический цилиндр

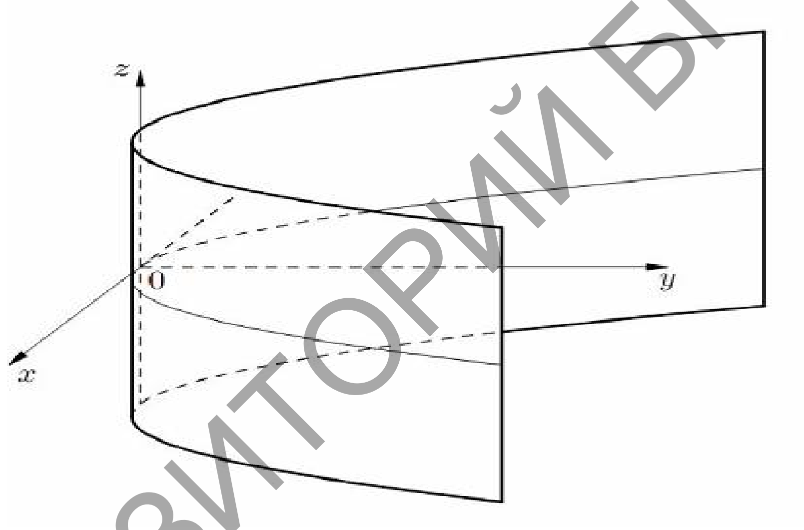


Рис. 30. Параболический цилиндр

Упражнения 3.6

1. Какие плоскости являются плоскостями симметрий эллипсоида, заданного уравнением: $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+5)^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{16}=1$?

2. Записать уравнение конуса, являющегося асимптотическим для гиперболоида $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$.

3. Найдите радиус окружности, получаемый в сечении гиперболоида $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ плоскостью $z = 8$.

4. Построить сечение гиперболического параболоида $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{25}=2(z+2)$ плоскостью *OXY*.

5. Записать в общем виде уравнение сферы с центром в точке $M(a, b, c)$ и радиусом R.

Тест

1. Какой из следующих эллипсоидов может быть получен вращением вокруг оси OX эллипса, заданного в OXY уравнением $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$: а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{36}=1$, б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$, в) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$, г) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{13}=1$, д) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1$?

2. Какое из следующих уравнений соответствует кривой второго порядка, получаемой в сечении однополосного гиперболоида $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$, плоскостью OXY: а) $\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$, б) $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$, в) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, г) $\frac{z^2}{16}=1-\frac{xy}{36}$, д) $\frac{z^2}{36}=1$?

3. Что из перечисленных линий получается в сечении гиперболического параболоида $\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=2x$ плоскостью OXY: а) окружность, б) эллипс, в) гипербола, г) парабола, д) пересекающиеся прямые?

4. Какой из цилиндров второго порядка можно получить перемещением гиперболы вдоль оси OZ: а) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$, б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, в) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, г) $\frac{x^2}{4}=y$, д) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=0$?

5. Какая из следующих поверхностей не имеет центра симметрии: а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$, б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=1$, в) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=2z$, г) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$, д) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=0$?

Задачи

1. Найти координаты точек, симметричных относительно прямой $y = -x$ точкам: а) $A(3, 5)$, б) $B(-4, 3)$, в) $C(7, -2)$.

2. Определить, в каких четвертях координатной плоскости может быть расположена точка $M(x, y)$, если: а) $xy > 0$, б) $xy < 0$, в) $x - y = 0$, г) $x + y = 0$, д) $x + y > 0$, е) $x + y < 0$, ж) $x - y > 0$, з) $x - y < 0$.

3. Найти координаты точек правильного шестиугольника *ABCDEF*, центром симметрий которого является начало отсчета точка *O*, а вершина *A* имеет координаты (2, 0).

4. Найти углы треугольника *ABC*, если *A* – точка пересечения прямых $3x + 2y - 6 = 0$ и $x - 4y - 4 = 0$, *B* – прямых $3x + 2y - 2 = 0$ и $x + 3y - 12 = 0$, *C* – прямых $x - 4y - 4 = 0$ и $x + 3y - 12 = 0$.

5. Составить уравнение прямой в форме $y = kx + p$, исходя из того, что она проходит через точки $A(-1, 4)$, $B(2, 5)$.

6. Найти уравнения четырех прямых при попарном пересечении которых получается квадрат *ABCD*, вершины *A* и *B* которого имеют координаты (2, 7) и (6, 10) соответственно.

7. На прямой $y = -x + 2$ найти ближайшую к началу координат точку (т.е. находящуюся на минимальном расстоянии).

8. Найти расстояние *d* от точки $M(-5, 3)$ до прямой $2x + 3y - 2 = 0$.

9. Даны векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$: $|\vec{p}| = 13$, $|\vec{q}| = 19$ и $|\vec{p} + \vec{q}| = 24$. Вычислить $|\vec{p} - \vec{q}|$.

10. По векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$ построить каждый из следующих векторов: а) $5\vec{p}$, б) $\frac{1}{2}\vec{q}$, в) $5\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}$, г) $5\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q}$, д) $\frac{1}{2}\vec{p} - 5\vec{q}$, если 1) $\vec{p}(-3,\ 2)$ и $\vec{q}(2,\ 7)$, 2) $\vec{p}(2,\ 2)$ и $\vec{q}(5,\ 0)$, 3) $\vec{p}(0,\ -2)$ и $\vec{q}(2, -7)$.

11. Угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен 60°, причем $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 8$. Определить $|\vec{p} + \vec{q}|$ и $|\vec{p} - \vec{q}|$.

12. Угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен 120°, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$. Вычислить: а) $\vec{p}\vec{q}$, б) $\vec{p}^2$, в) $\vec{q}^2$, г) $(\vec{p} + \vec{q})^2$, д) $(\vec{p} - \vec{q})^2$, ж) $(3\vec{p} + 4\vec{q})^2$, з) $(3\vec{p} - \vec{q})(\vec{p} + 2\vec{q})$.

13. Используя понятия: противоположно направленные, равные векторы; угол между векторами; скалярное произведение векторов – найти вершины правильного шестиугольника *ABCDEF* с центром симметрий в точке *H*(4, 6), если вершина *A* имеет координаты $(4 + \sqrt{2}, 6 + \sqrt{2})$.

14. Два вектор $\vec{p}(1, 0)$ и $\vec{q}(2, 2\sqrt{3})$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\vec{r}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $|\vec{r}| = 6$.

15. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, если: а) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси *OX* и ее

параметр $p = 1$; б) парабола расположена симметрично относительно оси OY и проходит через точку $C(1, 1)$.

16. Сколько общих точек имеют гипербола и эллипс: а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ и $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$; б) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ и $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; в) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ и $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

17. Вывести общее правило, по которому можно определить, сколько общих точек имеют гипербола $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ и эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

18. Какие кривые определяют следующие уравнения: а) $y = +\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$, б) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$, в) $x = -\sqrt{y^2 + 9}$, г) $y = +\frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}$. Изобразить эти кривые на чертеже.

19. Точка $P(2, -1, -1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

20. Даны точки $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, -2, -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3, 4, -5)$ параллельно векторам $\overrightarrow{a_1} = (3,\ 1,\ -1)$ и $\overrightarrow{a_2} = (1,\ -2,\ 1)$.

22. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

а) $2x + ly + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 6z + 2 = 0$;

б) $3x - y + lz - 9 = 0$, $2x + my + 3z - 3 = 0$.

23. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

а) $3x - 5y + lz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$;

б) $lx + y - 3z - 3 = 0$, $2x + my - 3z + 1 = 0$.

24. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 2y + z = 0$.

25. Установить, что плоскость $x - 2 = 0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.

26. Установить, что плоскость $z + 1 = 0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$ по гиперболе; найти ее оси и вершины.

27. Установить, что плоскость $y + 6 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$ по параболе; найти ее фокальный параметр и вершину.

28. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$, лежащего в плоскости OYZ, вокруг оси OY.

29. Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, лежащей в плоскости OXY, вокруг оси OZ.

30. Сколько различных цилиндров можно описать вокруг сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Найти уравнения цилиндров, описанных вокруг этой сферы, сечениями которых плоскостью OXY являются две параллельные прямые.

4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

4.1. Функция действительного переменного

Действительными (или вещественными) числами называются рациональные и иррациональные числа. Множество всех действительных чисел обозначается буквой R. Каждое действительное число может быть изображено точкой на числовой прямой.

Пусть даны два непустых множества X и $Y \in R$. Если каждому элементу x из множества X по определенному правилу f ставится в соответствие один и только один элемент y из Y, то говорят, что на множестве X задана *функция* (или отображение) со множеством значений Y, что можно записать как f: $X \to Y$ или $y = f(x)$. Элемент x называется *аргументом функции* $y = f(x)$, множество X – *областью определения функции*, обозначаемой $D(f)$, множество Y, состоящее из всех чисел вида $y = f(x)$, – *областью значений функции*, обозначаемой $E(f)$. *Графиком функции* $y = f(x)$ называется множество точек плоскости OXY с координатами $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$.

Основными элементарными функциями являются следующие:

1) *степенная функция* $y = x^a$, где $a \in R$, область определения функции зависит от степени a.

Примерами степенной функции являются (рис.1): $y = x^2$, $x \in R$; $y = x^3$, $x \in R$; $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x \in R / \{0\}$; $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $x \geq 0$; $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in R$;

2) *показательная функция* $y = a^x$, где a – любое положительное число, отличное от единицы: $a > 0$, $a \neq 1$; $x \in R$.

Экспоненциальная функция $y = e^x$, где иррациональное число e=2,71828… известное как *Неперово число*, представляет собой частный случай показательной функции (рис. 2);

3) *логарифмическая функция* $y = \log_a x$, где a – любое положительное число, отличное от единицы: $a > 0$, $a \neq 1$; $x > 0$.

Частным случаем логарифмической функции является функция *натурального логарифма* $y = \ln(x) = \log_e x$ (рис. 3);

4) *тригонометрические функции*: $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $x \in R$; $y = \mathrm{tg}(x)$, $x \in R \,/\, \{\pi/2 + \pi n,\ n \in Z\}$; $y = \mathrm{ctg}(x)$, $x \in R \,/\, \{\pi n,\ n \in Z\}$ (рис. 4);

5) *обратные тригонометрические функции*: $y = \arcsin(x)$, $y = \arccos(x)$, $x \in [-1, 1]$; $y = \mathrm{arctg}(x)$, $y = \mathrm{arcctg}(x)$, $x \in R$ (рис. 5).

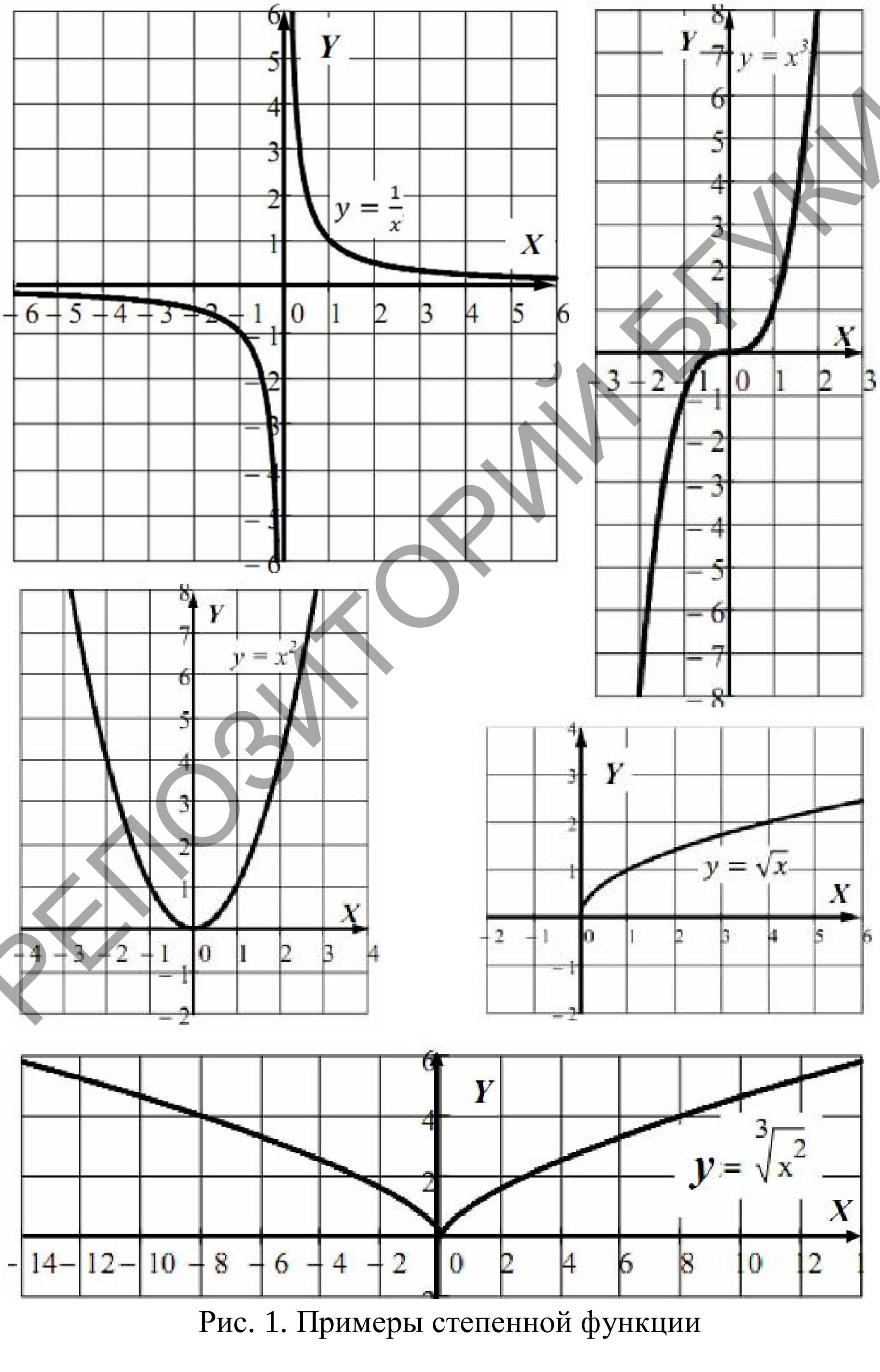


Рис. 1. Примеры степенной функции

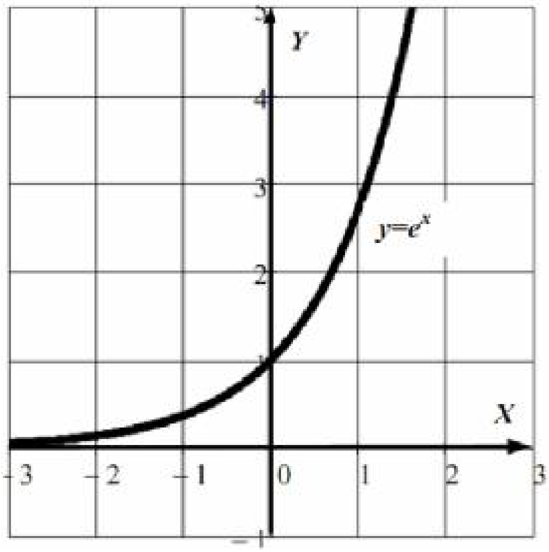


Рис. 2. Экспоненциальная функция

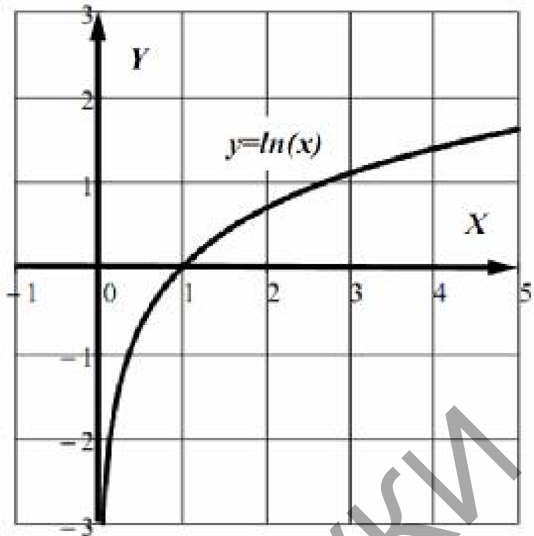


Рис. 3. Логарифмическая функция

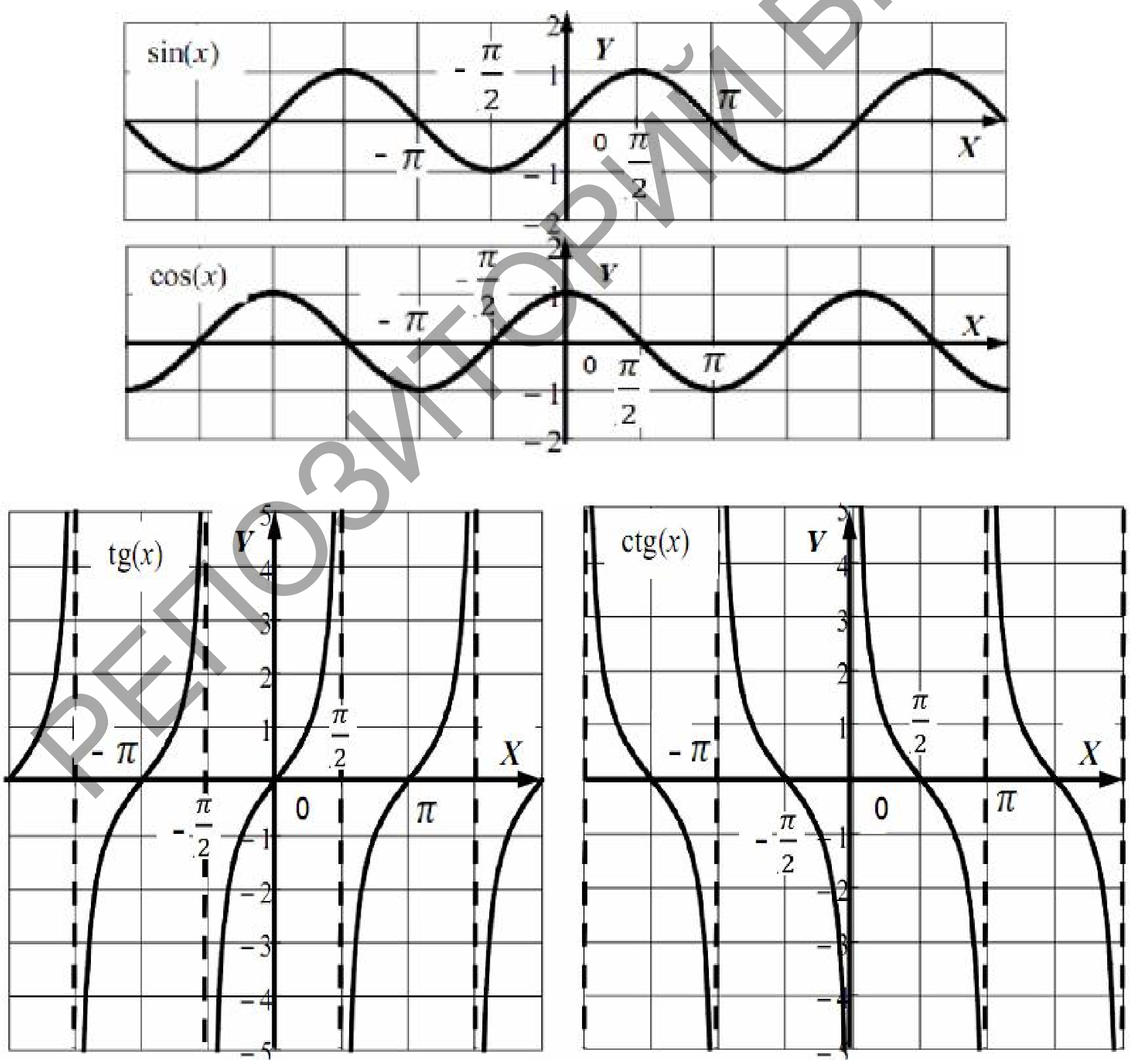


Рис. 4. Тригонометрические функции

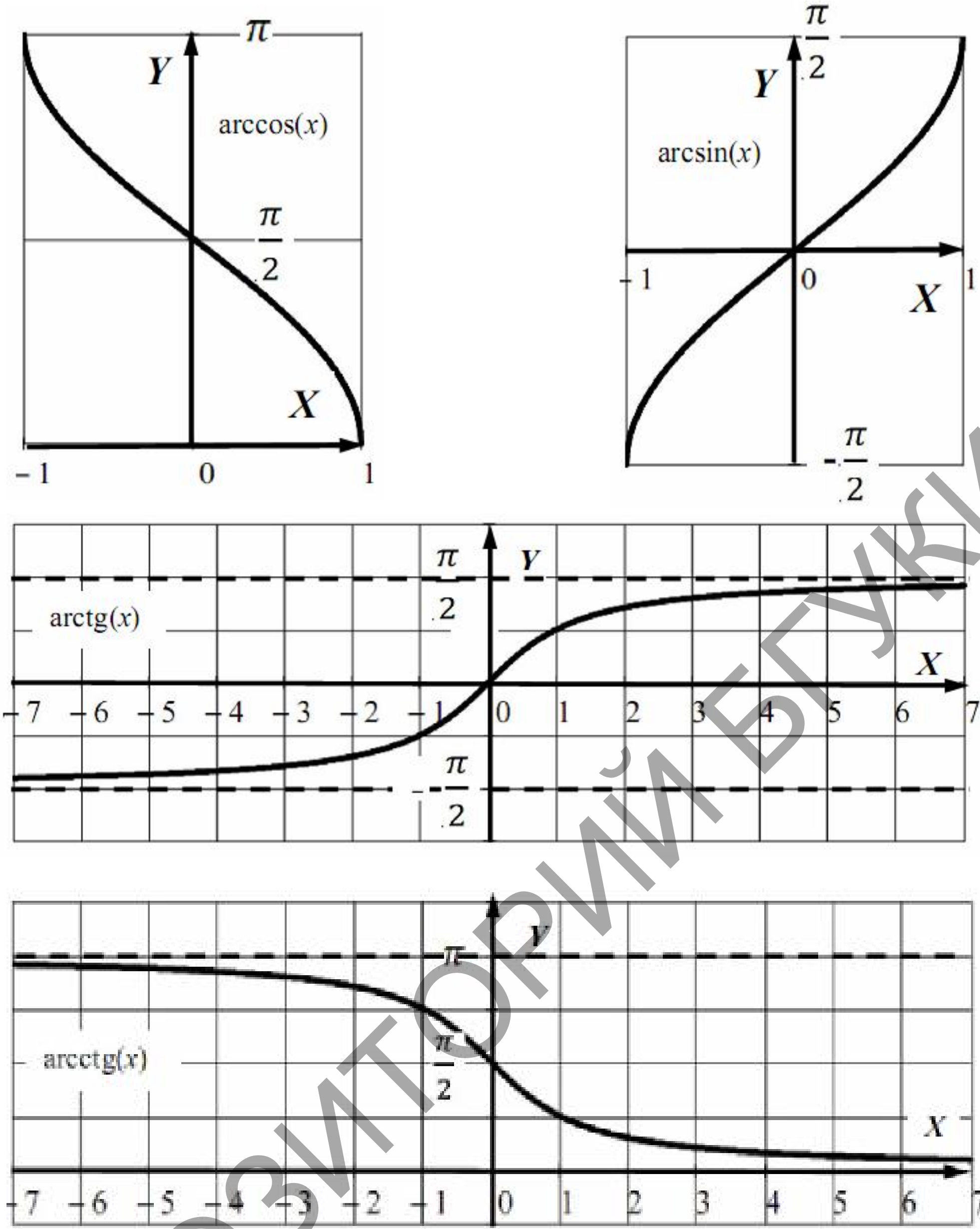


Рис. 5. Обратные тригонометрические функции

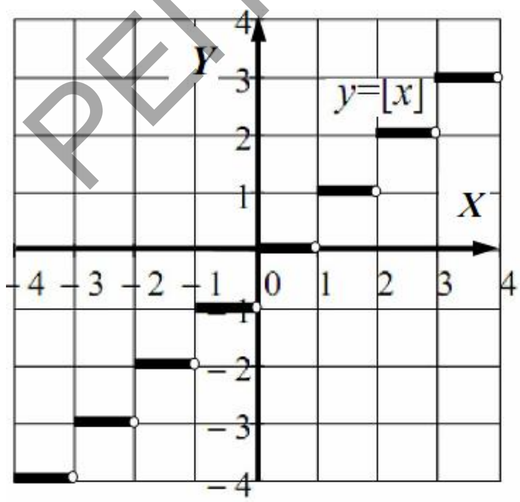


Рис. 6. Целая часть от *x* –«пол»

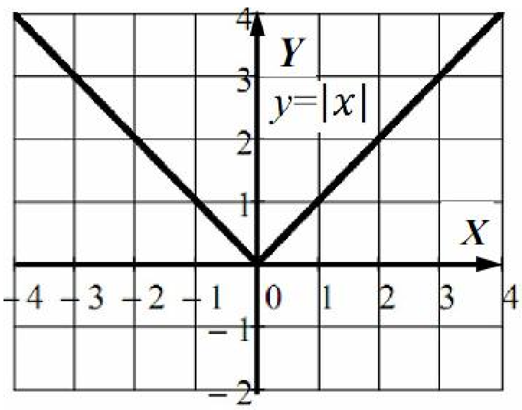


Рис. 7. Модуль *x*

Элементарными функциями называются функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий: сложения, вычитания, умножения, деления, а также композиций функций.

Композиция функций (*суперпозиция функции*) – это формирование сложных функций путем применения одной функции к результату другой $y = f(\varphi(x))$.

Примеры:

1. Элементарные функции:

$y = x^2 + \ln(x)$ – функция получена *сложением* двух простейших элементарных функций $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = \ln(x)$;

$y = \ln(x^2)$ – функция получена путем *композиции* двух простейших элементарных функций $y = f_1(z) = \ln(z)$ и $z = f_2(x) = x^2$;

$y = \cos(\ln^4(x))$ – функция получена путем *композиции* трех простейших элементарных функций $y = f_1(z) = \cos(z)$, $z = f_2(t) = t^4$ и $t = f_3(x) = \ln(x)$.

2. Неэлементарные функции:

$y = \lfloor x \rfloor = \max\{n \in Z, n \leq x\}$ – *целая часть* x – «пол»: равна наибольшему целому числу, меньшему x (рис. 6);

$y = |x| = \begin{cases} x, & если\ x \geq 0, \\ -x, & если\ x \leq 0 \end{cases}$ – *модуль* x.

Геометрически *модуль* x равен расстоянию на числовой прямой от точки с координатой x до начала отсчета (рис. 7).

Функции *целая часть от* x и *модуль* x невозможно получить из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий или композиций функций.

3.Найти область определения функции $f(x)=\frac{x-3}{(3x+5)^2}$.

Поскольку деление на 0 не допустимо, то $(3x + 5)^2 \neq 0$, т.е. $x \neq -5/3$. Таким образом, областью определения функции является вся числовая прямая за исключением $x = -5/3$:

$$D(f) = R \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}.$$

Функция $f(x)$ называется *четной*, если для любого значения $x \in D(f)$ выполняется: $f(-x) = f(x)$. Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если для любого значения $x \in D(f)$ выполняется: $f(-x) = -f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси OX, график нечетной функции симметричен относительно начала отсчета.

Примеры:

1. $f(x) = x^2$: $f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = f(x)$, следовательно, функция $f(x) = x^2$ четная, ее график симметричен относительно оси OX (рис. 1).

Четными являются также функции: $y = \sqrt[3]{x^2}$ (рис. 1), $y = \cos(x)$ (рис. 4), $y = |x|$ (рис. 7).

2. $f(x) = x^3$: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, следовательно, функция $f(x) = x^3$ нечетная и ее график симметричен относительно начала отсчета (рис. 1).

Нечетными являются также функции: $y = 1/x$ (рис. 1), $y = \sin(x)$, $y = \mathrm{tg}(x)$, $y = \mathrm{ctg}(x)$ (рис. 4), $y = \mathrm{arctg}(x)$, $y = \arcsin(x)$, $y = \arccos(x)$ (рис. 5).

3. $f(x) = e^x$: $f(-x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $\frac{1}{e^x} \neq f(x)$, $\frac{1}{e^x} \neq -f(x)$, следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной (рис. 2).

Примером функции, не являющейся ни четной, ни нечетной, служит функция $y = \mathrm{arcctg}(x)$ (рис. 5). Функции $y = \ln(x)$ (рис. 3), $y = \sqrt{x}$ (рис. 1) определены лишь для неотрицательных x и поэтому также не являются ни четными, ни нечетными.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T > 0$, такое, что при $x \in D(f)$ и $(x + T) \in D(f)$ выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$. Число T называется *периодом* функции, а наименьший из периодов – *основным периодом* функции.

Пример.

Примерами периодических функций служат тригонометрические функции $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$ с основным периодом, равным 2π, и $y = \mathrm{tg}(x)$, $y = \mathrm{ctg}(x)$ с основным периодом, равным π (рис. 4).

Упражнения 4.1

1. Привести примеры элементарных функций, полученных из простейших элементарных $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = x^5$, $f(x) = e^x$ путем композиции.

2. Найти основные периоды функций: а) $y = \sin(2x)$, б) $y = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{3}\right)$, в) $y = 3\cos(4x)$.

3. Найти области определения функций: а) $y = \sqrt{(x-8)^3}$, б) $y = \sqrt{(x+8)^4}$, в) $y = \frac{1}{x+8^4}$, г) $y = \ln(x-8)^2$.

4. Почему не является элементарной функция *целая часть от* x – *«потолок»*: $y = \lceil x \rceil = \min\{n \in Z, n \geq x\}$, равная наименьшему целому числу, большему x?

5. Нарисовать графики неэлементарных функций, *целая часть* x – «потолок»: $y = \lceil x \rceil = \min\{n \in Z, n \geq x\}$; $y = -|x-3|$.

Тест

1. Какая из следующих функций не является элементарной: а) $y = x^3$, б) $y = \sqrt[3]{x}$, в) $y = \ln(x^2)$, г) $y = \ln|x|$, д) $y = \sqrt[3]{x} + \sin(x)$?

2. Какой из следующих промежутков не входит в область определения функции $y = \sqrt{x}$: а) [0, 1], б) (0, 1), в) [0, 1), г) (– 1, 0], д) [1, +∞)?

3. Какой из следующих промежутков не входит в область значений функции $y = x^2$: а) [0, 1], б) (0, 1), в) [0, 1), г) (– 1, 0], д) [1, +∞)?

4. Какая из следующих функций является четной: а) $y = x^3 + 3$, б) $y = x^2 + 2$, в) $y = (x+2)^2$, г) $y = (x+3)^3$, д) $y = x^2 + x^3$?

5. Какая из следующих функций является нечетной: а) $y = x^3 + 3$, б) $y = x^2 + 2$, в) $y = (x+2)^2$, г) $y = (x+3)^3$, д) $y = 3x + x^3$?

Примечание. При выполнении теста см. рис. 1–7.

4.2. Предел и непрерывность функции

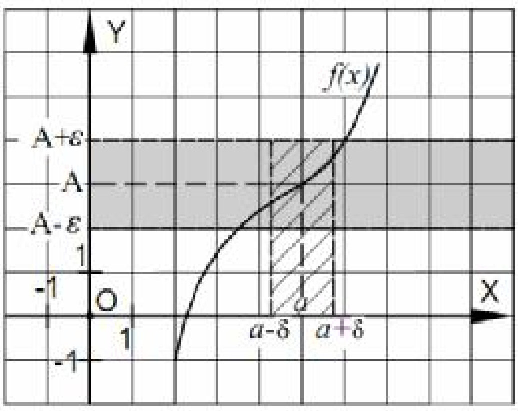


Рис. 8. Геометрический смысл предела функции в точке $x = a$

Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$ (рис. 8). Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N > 0$, что при $|x| > N$: $|f(x) - A| < \varepsilon$. Предел обозначается:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Если $x < a$ и $x \to a$, употребляют запись $x \to (a - 0)$ и говорят, что x стремится к a слева; если $x > a$ и $x \to a$, записывают $x \to (a + 0)$ и говорят, что x стремится к a справа. Числа

$$f(x - a) = \lim_{x \to a-0} f(x) \text{ и } f(x + a) = \lim_{x \to a+0} f(x)$$

называются соответственно *левым и правым пределом* функции $f(x)$ в точке a. Для существования предела функции $f(x)$ при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы $f(a - 0) = f(a + 0)$.

Понятие непрерывности функции

С понятием предела непосредственно связано понятие непрерывности функции: функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке a*, если:

1) эта функция определена в некотором интервале, содержащем точку a (т. е. в самой точке a и вблизи этой точки);

2) существуют, конечны и равны между собой левый и правый пределы

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x);$$

3) значение пределов равно значению функции в точке a:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a+0} f(x).$$

Функция $f(x)$ называется *разрывной* в точке a, если она определена в сколь угодно близких точках, но в самой точке a не удовлетворяет хотя бы одному из условий непрерывности. Если точка a является левой или правой границей области определения функции $f(x)$, то следует рассматривать значения функции соответственно только справа или только слева от этой точки и в самой точке. При этом: 1) если граничная точка a входит в область определения функции, то она будет точкой непрерывности или точкой разрыва функции, смотря по тому, будет ли предел функции изнутри ее области определения равен или не равен значению функции в точке a;

2) если граничная точка a не входит в область определения функции, то она является точкой разрыва функции.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области (интервала, сегмента и т. п.), то она называется непрерывной *в этой области*.

Пример. Исследовать на наличие точек разрыва функции:

1. $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Область определения функции представляет собой все действительные числа за исключением числа $x = 0$. Таким образом, в точке $x = 0$ нарушается первое условие непрерывности функции, т. е. точка $x = 0$ – является точкой разрыва функции (рис. 1).

2. $y = \sqrt{x}$.

Решение. Областью определения функции являются все неотрицательные числа: $D(y) = [0, \infty)$. Точка $x = 0$ является граничной точкой области определения и принадлежит этой области. Функция существует правее точки $x = 0$.

Найдем правосторонний предел: $\lim\limits_{x \to 0+0} \sqrt{x} = 0$. Найдем значение функции при $x = 0$: $\sqrt{0} = 0$.

Предел функции при $x \to 0$ равен значению функции в точке $x = 0$, значит, функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна в точке $x = 0$, а следовательно, не имеет точек разрыва (рис. 1).

3. $y = \ln(x)$.

Решение. Областью определения функции являются все положительные числа: $D(y) = (0, \infty)$. Точка $x = 0$ является граничной точкой области определения, но не принадлежит этой области, а следовательно, является ее точкой разрыва (рис. 1).

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то есть для любого сколь угодно большого M найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x)| > M$ при $0 < |x - a| < \delta$. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Примеры:

1. Функция $y = \mathrm{tg}(x)$ (рис. 4) является бесконечно большой при $x \to \frac{\pi}{2} - 0$.

2. Функция $y=e^x$ (рис. 2) является бесконечно большой при $x \to +\infty$.

3. Функция $y=e^x$ (рис. 2) является бесконечно малой при $x \to -\infty$.

4. Функция $y=\sin(x)$ (рис. 4) является бесконечно малой при $x \to 0$.

Вычисление пределов функции

Практическое вычисление пределов основывается на следующих правилах, теоремах и утверждениях.

I. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то верны следующие равенства:

1) $\lim\limits_{x\to a}(\alpha f(x) \pm \beta g(x)) = \alpha \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \beta \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \times g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

II. Если функция $f(x)$ непрерывна (см. п. 4.2) в точке $x = x_0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = x_0$, то

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = x_0.$$

III. Если в некотором достаточно малом промежутке, содержащем точку a, для любого x выполняется $g(x) \leq f(x)$, то

$$\lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} f(x).$$

IV. Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

V. Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \text{ и } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

VI. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, причем хотя бы один из них *бесконечен* либо равен *нулю*, тогда для вычисления предела $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ можно воспользоваться таблицами 1, 2.

Если существует предел $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ и не существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, но в некотором интервале, содержащем точку a (либо на бесконечности, при $a = \infty$), выполняется условие $|f(x)| \le A$ (A – любое положительное число), то вычислить предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ можно с помощью таблиц 1, 2.

Если существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и не существует предел $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, но в некотором интервале, содержащем точку a (либо на бесконечности, при $a = \infty$), выполняется условие $|g(x)| \le A$ (A – любое положительное число), то вычислить предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ можно с помощью таблиц 1, 2.

Таблица 1

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\pm A$, $0+0$, $0-0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\pm\infty$	$-A$, $0-0$	A, $0+0$	$-A$, $0-0$	A, $0+0$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	**0**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	правило Лопиталя (см. п. 4.3)

Таблица 2

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\mathbf{0+0}$, $\mathbf{0-0}$	$-A$, $-\infty$	$-A$, $-\infty$	A, $+\infty$	A, $+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\pm A$, $\pm\infty$	$\mathbf{0-0}$	$\mathbf{0+0}$	$\mathbf{0-0}$	$\mathbf{0+0}$	0
$\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	**0**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	правило Лопиталя (см. п. 4.3)

Здесь A – любое положительное число. Запись $0 + 0$ будем использовать для указания того, что значение некоторой переменной либо функции стремится к нулю, при этом оставаясь положительным, а $0 - 0$ – для указания того, что значение некоторой переменной либо функции стремится к нулю, при этом оставаясь отрицательным.

Например, $\lim\limits_{x \to 2}(x-2)^2 = 0+0$, так как при любых значениях x: $(x-2)^2 \ge 0$; $\lim\limits_{x \to 2-0}(x-2)^3 = 0-0$, так как при любых $x < 2$: $(x-2)^3 < 0$.

VII. Предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_2x^2+b_1x+b_0}$ можно вычислить по следующей таблице:

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">$n > m$</td><td>$n < m$</td><td>$n = m$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x \to +\infty$</td><td>$a_nb_m > 0$</td><td>$a_nb_m < 0$</td><td rowspan="4">0</td><td rowspan="4">$\frac{a_n}{b_m}$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x \to -\infty$</td><td>$(-1)^{n-m}a_nb_m > 0$</td><td>$(-1)^{n-m}a_nb_m < 0$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>

VIII. Предел $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_2x^2+b_1x+b_0}$ можно вычислить по следующей таблице:

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">$r < p$</td><td>$r > p$</td><td>$r = p$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x \to 0 + 0$</td><td>$a_rb_p > 0$</td><td>$a_rb_p < 0$</td><td rowspan="4">0</td><td rowspan="4">$\frac{a_r}{b_p}$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x \to 0 - 0$</td><td>$(-1)^{p-r}a_rb_p > 0$</td><td>$(-1)^{p-r}a_rb_p < 0$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>

Выражение $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ называется *многочленом, или полиномом,* от переменной x степени n. Здесь n – старшая степень многочлена (самая большая степень), a_i, $i = \overline{1,n}$ –коэффициенты многочлена. Запишем многочлен в виде $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_{r+1}x^{r+1} + a_rx^r$. Степень r – младшая степень многочлена (самая маленькая степень). Слагаемое a_0 можно представить в виде $a_0 = a_0x^0$, таким образом, если $a_0 \neq 0$, младшая степень многочлена $r = 0$.

Примеры:

1. Определить младшую степень r многочлена

$$-5x^3 - 2x^2 + 1.$$

Решение: Записав многочлен в виде $-5x^3 - 2x^2 + 1x^0$, найдем $r = 0$.

2. Используя I-ый замечательный предел, вычислить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x^7)}{x^7}.$$

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(5x^7)}{x^7} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin(5x^7)}{5x^7} = 5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(5x^7)}{5x^7} = 5.$

3. Используя II-ой замечательный предел, вычислить:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x^5}\right)^{x^5}.$$

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x^5}\right)^{x^5} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x^5}\right)^{3x^5\times\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}}$.

4. Пользуясь правилами VI–VIII, вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{(x-2)^3}$.

Решение. Рассмотрим функцию $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x^3+1}}{(x-2)^3}$. При $x = 2$ $f(x)=\sqrt{x^3+1}$ и $g(x)=(x-2)^3$ непрерывны, следовательно, $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)=\sqrt{2^3+1}=3$, $\lim\limits_{x\to2-0} g(x)=(2-2)^3=0$.

Поскольку один из пределов равен 0, воспользуемся правилом VI. Итак, числитель $f(x)$ рассматриваемой функции при $x \to 2-0$ стремится к $A = 3$, а знаменатель $g(x)$ к $0-0$, (т.е. значение $g(x)$ стремится к 0, оставаясь при этом отрицательным). Для вычисления предела воспользуемся 5-м столбцом таблицы 2 правила VI, из которого, следует, что

$$\lim_{x\to2-0}\frac{\sqrt{x^3+1}}{(x-2)^3}=-\infty;$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-2x^2+1}{-2x^2+7}$.

Решение. Так как $x\to-\infty$, воспользуемся правилом VII. Старшая степень числителя $n = 5$, знаменателя $m = 2$. Поскольку $n > m$, определим знак $(-1)^{5-2}a_5b_2$: $a_5 = 3$ и $b_2 = -2$, следовательно, $(-1)^3 a_5\cdot b_2 = (-1)\times5\times(-2) = -10 < 0$, значит,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5-2x^2+1}{-2x^2+7}=-\infty;$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x^2-2x+1}{2x^3+7}$.

Решение. Так как $x\to+\infty$, применим правило VII. Старшая степень числителя $n = 2$, знаменателя $m = 3$, => $n < m$, =>

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x^2-2x^2+1}{2x^3+7}=0;$$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x)}{(x-2)^3}$.

Рассмотрим функцию $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sin(x)}{(x-2)^3}$. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin(x))$ не существует, однако $|\sin(x)| \le 1$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x-2)^3=\infty$. Воспользовавшись 2-м столбцом таблицы 1 ($A = 1$) правила VI, установим, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{(x-2)^3}=0.$$

5) $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{-5x^2-2x^2+1}{2x^3+7}$.

Решение. Так как $x\to 0-0$, применим правило VIII. Младшая степень a числителя $r=0$, знаменателя $p=0$, => $r=p$, =>

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{-5x^2-2x^2+1}{2x^3+7}=\frac{a_0}{b_0}=\frac{1}{7}.$$

Поиск асимптот

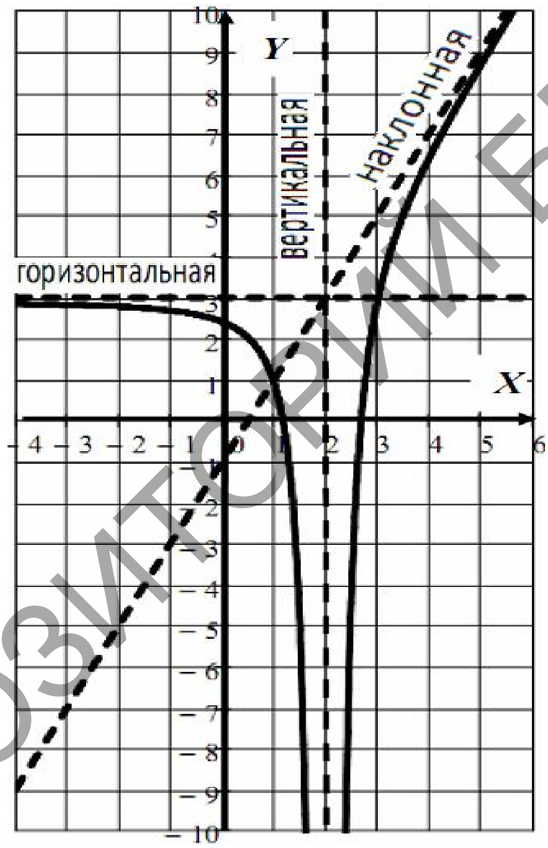


Рис. 9. Асимптоты

Непосредственно с нахождением пределов связан один из важных этапов исследования функции – поиск асимптот. Напомним, что прямая α называется *асимптотой* кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки кривой $M(x, f(x))$ до прямой α стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат (т. е. при стремлении хотя бы одной из координат точки к бесконечности). Асимптоты кривой делятся на вертикальные вида $x=a$, горизонтальные $y=b$ и наклонные $y=kx+b$ (рис. 9).

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если существует $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx], \text{ или}$$

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx].$$

Примечание. Кривая может иметь вертикальные асимптоты на границах области определения либо в точках разрыва.

Пример. Найти асимптоты функции $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-2)^2}$.

Решение. 1) Функция имеет разрыв в точке $x = 2$, следовательно, возможно наличие вертикальных асимптот:

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x^3 - 3x^2}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2-0} \frac{x^3 - 3x^2}{(x-2)^2} = \left(\frac{-4}{0+0}\right) = [\text{правило VI}] = -\infty,$$

следовательно, прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота.

2) Исследуем функцию на наличие наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x(x-2)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 4} = [\text{правило}VII] = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^3}{(x-2)^2} - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + x^3 + 4x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4}\right] = [\text{правило VII}] = 1.$$

Таким образом, $y = x + 1$ – наклонная асимптота функции при $x \to +\infty$. Легко проверить, что прямая $y = x + 1$ является наклонной асимптотой функции при $x \to -\infty$.

Упражнения 4.2

1. Сколько точек разрыва на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеют функции: а) $y = \mathrm{tg}(x)$, б) $y = \mathrm{ctg}(x)$, в) $y = \cos(x)$, г) $y = \sqrt{x + \pi}$, д) $y = (1 - \pi)^{-1}$?

2. Найти младшую степень следующих многочленов: а) $3x^2 + x$, б) $2x + 5x^3$, в) $2 + x^9$, г) x^3, д) $3x^3 + x + 0$.

3. Какую асимптоту имеет функция $y = \frac{\sin(x-2)^2}{(x-2)^2}$: а) вертикальную, б) горизонтальную, в) наклонную?

4. Вычислить пределы $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi(x-1)^7)}{(x-1)^7}$ и $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi(x-1)^7)}{(x-1)^7}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(\pi(x-1)^7)}{(x-1)^7}$.

5. Найти пределы $\lim_{x\to 3-0}\lfloor x\rfloor$ и $\lim_{x\to 3+0}\lfloor x\rfloor$ функции *целая часть от* x-«пол»:

$$\lfloor x\rfloor = \max\{n \in Z, n \le x\}).$$

Примечание. При выполнении упражнений см. рис. 1–7 и примеры п. 4.2.

Тест

1. Какая из следующих функций не имеет предела при x стремящемся к бесконечности: а) $y = \ln(x)$, б) $y = \operatorname{arctg}(x)$, в) $y = e^x$, г) $y = \operatorname{arctg}(x)$, д) $y = \sin(x)$, е) $y = x^3$.

2. Которая из следующих функций является бесконечно большой при $x \to (0 + 0)$ и бесконечно малой при $x \to +\infty$: а) $y = x^2$, б) $y = e^x$, в) $y = \operatorname{arctg}(x)$, г) $y = \frac{1}{x}$, д) $y = \sin(x)$?

3. Какое из равенств является неверным:

а) $\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, б) $\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, в) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)} = 1$, г) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, д) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin(x) = 1$.

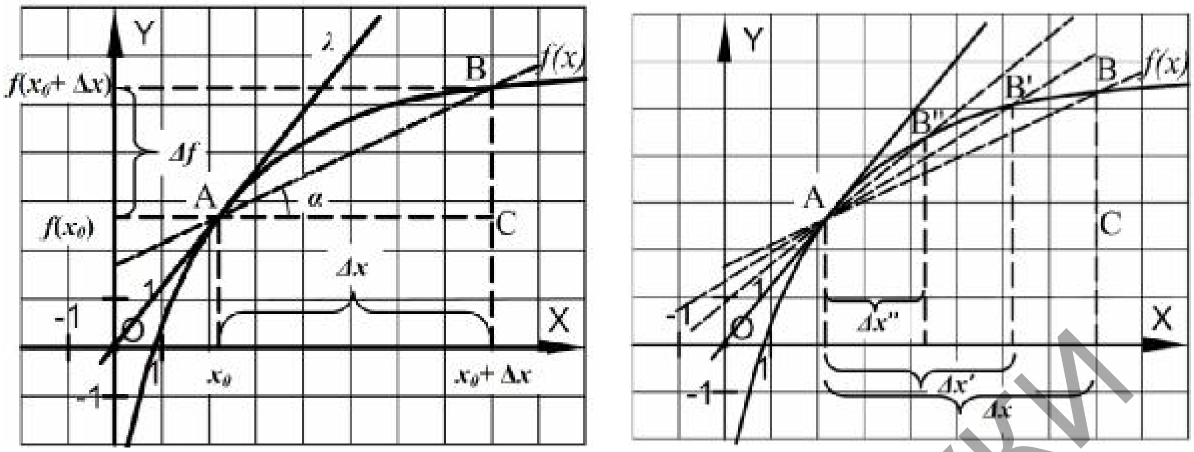
4. Какая из следующих функций не имеет асимптот: а) $\frac{1}{x}$, б) $\operatorname{arctg}(x)$, в) $\operatorname{arcctg}(x)$, г) $\operatorname{tg}(x)$, д) $\cos(x)$?

5. Какая из следующих функций является непрерывной на отрезке $[-1,1]$: а) $y = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$, б) $y = \operatorname{ctg}(x)$, в) $y = \ln(x^2)$, г) $y = \lfloor x\rfloor$, д) $y = \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}$?

6. Сколько точек разрыва имеет функция *целая часть от* x-«пол» $\lfloor x\rfloor = \max\{n \in Z, n \le x\}$: а) не имеет точек разрыва, б) 8, в) ∞, г) 1, д) 16 ?

Примечание. При выполнении теста см. рис.1–7.

4.3. Производная функции



а) б)

Рис. 10 Геометрический смысл производной

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на промежутке $[a, b]$ (рис. 10а) Точка A, принадлежащая графику функции, имеет координаты $A(x_0, f(x_0))$. Решим задачу нахождения уравнения касательной λ к графику функции $y = f(x)$ в точке $A(x_0, f(x_0))$. Запишем уравнение касательной в виде $y = k_\lambda x + p_\lambda$.

Рассмотрим некоторую точку B графика функции $y = f(x)$, не совпадающую с A (рис. 10а). Пусть абсцисса точки B отличается от абсциссы точки A на некоторую величину Δx. Тогда точка B имеет координаты $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Через точку A проведем прямую, параллельную оси OX, через B – прямую, параллельную оси OY. Эти прямые пересекаются в точке C.

Выразим катеты треугольника ACB через координаты точек A и B:

$$AC = (x_0 + \Delta x) - x_0 = \Delta x,\ AB = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f.$$

Величина Δx называется приращением *аргумента функции*, Δf – *приращением функции*. Угол α – угол наклона прямой AB к положительно направленной оси OX. Пусть уравнение прямой AB имеет вид $y = k_{AB}x + p_{AB}$, тогда, согласно разделу 3.3, $k_{AB} = \text{tg}\,(\alpha)$. Выразим $\text{tg}(\alpha)$ через катеты прямоугольного треугольника ACB (рис 10а):

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Устремим точку B к точке A (рис. 10б). В этом случае величина Δx устремится к 0, а прямая AB устремится к касательной λ (рис. 10б) и коэффициент k_{AB} к коэффициенту k_λ, то есть

$$k_\lambda = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx при Δx, стремящимся к 0, называется *производной функции* (в точке x_0) и обозначается f' (либо $f'(x_0)$).

Таким образом, уравнение прямой λ можно записать в виде $y = f'(x_0)x + p_\lambda$. Учитывая, что λ проходит через точку $A(x_0, f(x_0))$, найдем p_λ: $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + p_\lambda$, => $p_\lambda = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Теперь запишем окончательное *уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $A(x_0, f(x_0))$:*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Производную обозначают также y' и y_x'. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*. Функция $y = f(x)$, которая имеет производную в точке x, называется *дифференцируемой в этой точке*. Функция $y = f(x)$, которая имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, называется *дифференцируемой на этом промежутке*.

Итак, мы выяснили, что *геометрический смысл производной* заключается в том, что для кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, производная $f'(x_0)$ равна тангенсу угла наклона касательной к кривой в точке с абсциссой x_0, к положительно направленной оси OX.

Выясним *механический смысл производной*. Рассмотрим материальную точку, движущуюся по прямой. Пусть за время t от начала движения точка проходит расстояние $s(t)$. Зависимость s от t, задаваемую функцией $s(t)$, называют законом движения точки. За промежуток времени от t до $t + \Delta t$ точка проходит расстояние $s(t + \Delta t) - s(t)$. Найдем среднюю скорость движения точки на промежутке $[t, t + \Delta t]$:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{t + \Delta t - t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Чтобы найти мгновенную скорость v в момент времени t, необходимо Δt устремить к 0:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t),$$

таким образом, скорость движения точки в момент времени t есть производная пути по времени: $v(t) = s'(t)$.

Пример. Пользуясь определением производной, найти производную функции $y = x^2$.

Решение. Составим соотношение

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

По определению

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x.$$

Таким образом, $(x^2)' = 2x$.

С помощью определения производной построена таблица производных основных элементарных функций, которой можно воспользоваться для нахождения производных других элементарных функций.

Таблица производных

Функция	Производная	Функция	Производная
1. $y = C$	$y' = 0$	9. $y = \mathrm{tg}(x)$	$y' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
2. $y = x^m$	$y' = mx^{m-1}$	10. $y = \mathrm{ctg}(x)$	$y' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
3. $y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	11. $y = \log_a(x)$	$y' = \frac{1}{x\ln a}$
4. $y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	12. $y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$
5. $y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	13. $y = \arcsin(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $y = e^x$	$y' = e^x$	14. $y = \arccos(x)$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$	15. $y = \mathrm{arctg}(x)$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
8. $y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$	15. $y = \mathrm{arcctg}(x)$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Теорема 1. Производная алгебраической суммы двух дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных этих функций:

$$\left(u(x)+v(x)\right)' = u'(x)+v'(x).$$

Доказательство. Пусть $f(x) = u(x) + v(x)$. По определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

В формулу вместо $f(x)$ подставим выражение $u(x)+v(x)$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)\big) - \big(u(x) + v(x)\big)}{\Delta x};$$

и сгруппируем слагаемые представленные функциями u и v:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(x + \Delta x) - u(x)\big) + \big(v(x + \Delta x) - v(x)\big)}{\Delta x}.$$

Разделив почленно и воспользовавшись правилом I вычисления пределов (см. п. 4.2), получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x). \blacksquare$$

*Теорема***.** Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений каждой функции на производную другой:

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x).$$

Доказательство. Пусть $f(x) = u(x)v(x)$, тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x) \times v(x)}{\Delta x}.$$

Так как $\left|\begin{array}{l} \Delta u = u(x + \Delta x) - u(x) \Rightarrow u(x + \Delta x) = \Delta u + u(x) \\ \Delta v = v(x + \Delta x) - v(x) \Rightarrow v(x + \Delta x) = \Delta v + v(x) \end{array}\right|$, то

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x) \times v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)v(x) + v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta v \Delta u - u(x) \times v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta v \Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u(x) \times \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \times \frac{\Delta u}{\Delta x} \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u(x) \times \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(v(x) \times \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v.$$

Поскольку $u(x)$ и $v(x)$ не зависят от Δx, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$, то последнее выражение можно записать в виде

$$v(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = u'(x)v(x) + v'(x)u(x).$$

■

Из теоремы следует, что постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(Cy(x))' = Cy'(x).$$

Теорема. Производную частного двух дифференцируемых $\frac{u(x)}{v(x)}$ функций, где $v(x)\neq 0$, можно найти по формуле

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}.$$

Доказательство. Пусть $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Умножим обе части равенства на $v(x)$: $f(x)v(x) = u(x)$; продифференцируем $f'(x)v(x) + v'(x)f(x) = u'(x)$ и выразим $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)-v'(x)f(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)-v'(x)\frac{u(x)}{v(x)}}{v(x)} = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}. \blacksquare$$

Теорема. Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ тоже дифференцируема, и ее производную можно найти по формуле

$$y'_x = f'_\varphi(\varphi(x)) \times \varphi'(x).$$

Подытожим вышеизложенное в виде таблицы.

Таблица основных правил дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ 2. $(uv)' = u'v + v'u$	3. $(Cu)' = Cu'$ 4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$	5. $v=v(u(x))$, тогда: $v' = v'_u u'_x$

Примеры:

1. Найти первую производную следующих функций:

1) $y = 6x^9 + 5\text{tg}(x)$.

Решение. $y' = \left(6x^9 + 5\text{tg}(x)\right)' = 6(x^9)' + 5\left(\text{tg}(x)\right)' =$

$$= 6 \cdot 9x^{9-1} + 5\frac{1}{\cos^2(x)} = 54x^8 + 5\frac{1}{\cos^2(x)}.$$

2) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sin(x)}\right)' = \frac{(\sqrt{x})'\sin(x)-(\sin(x))'\sqrt{x}}{\sin^2(x)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(x)-\cos(x)\sqrt{x}}{\sin^2(x)};$$

3) $y = \ln(x)\cos(x)$.

Решение.

$$y' = \left(\ln(x)\cos(x)\right)' = (\ln(x))'\cos(x) + \ln(x)(\cos(x))' =$$
$$= \frac{1}{x}\cos(x) - \ln(x)\sin(x).$$

4) $y = \sqrt{\sin(x)}$.

Решение.

$$y' = \left(\sqrt{\sin(x)}\right)' = \left(\sqrt{\sin(x)}\right)'_{\sin(x)} \times (\sin(x))'_x = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}} \times \cos(x).$$

2. Найти уравнение касательной к кривой $f(x) = x^3 + 4x + 1$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Уравнение касательной в точке x_0 к кривой имеет вид: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Найдем производную функции $f(x)$: $f'(x) = (x^3 + 3x + 1)' = 3x^2 + 4$. Вычислим значения $f(x)$ и $f'(x)$ при $x_0 = 2$: $f(2) = 2^3 + 4 \cdot 2 + 1 = 17$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 4 = 16$. Подставим полученные значения в уравнение касательной: $y = 16(x - 2) + 17$; раскрыв скобки, получим $y = 16x - 15$.

Существование производной функции в точке связано с непрерывностью этой функции.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную, то она непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение не верно.

Примеры.

1. Функция $f(x) = |x|$ (рис. 7) непрерывна в точке $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0+0} |x| = \lim_{x \to 0-0} |x| = |0| = 0.$$

Вычислим производную функции $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Левый и правый пределы, определяющие производную функции, не равны между собой, следовательно, функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x_0 = 0$.

2. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (рис. 1) непрерывна в точке $x_0 = 0$, однако не имеет производной в этой точке. Найдем $f'(0)$:

$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3} - 1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; $f'(0) = \frac{2}{3\sqrt[3]{0}}$, и поскольку на ноль делить нельзя, производная в точке $x_0 = 0$ не существует.

Производные высших порядков

Производной второго порядка (второй производной) функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Механический смысл второй производной заключается в том, что вторая производная по времени функции $s(t)$, задающей закон движения материальной точки, есть ускорение этого движения в момент времени t:

$$a(t) = s''(t).$$

Производная третьего порядка функции $y = f(x)$ есть производная от производной второго порядка:

$$f'''(x) = (f''(x))'.$$

Производной n*–го порядка* от функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Производные высших порядков обозначают: y'', y'', $y^{(n)}$.

Применение производных существенно облегчает задачу вычисления пределов с неопределенностями вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Метод нахождения таких пределов называется *правилом Лопиталя*. Его суть изложим ниже.

Примеры.

1. Найти вторую и третью производные функции

$$y = 2x^4 + 3\sin(x).$$

Решение.

$$y'' = \left((2x^4 + 3\sin(x))'\right)' = (8x^3 + 3\cos(x))' = 24x^2 - 3\sin(x).$$
$$y''' = (y'')' = (24x^2 - 3\sin(x))' = 48x - 3\cos(x).$$

2. Вычислить скорость материальной точки v и ускорение a в момент времени $t_0 = 3$, если она движется прямолинейно по закону $s(t) = 2t^3 + 3t + 1$.

Решение. Согласно механическому смыслу первой и второй производных: $v(t_0) = s'(t_0)$, $a(t_0) = s''(t_0)$. Найдем $s'(t)$, $s''(t)$: $s'(t) = (2t^3 + 3t + 1)' = 6t^2 + 3$; $s''(t) = (s'(t))' = (6t^2 + 3)' = 12t$. Вычислим скорость и ускорение в момент $t_0 = 3$: $v(3) = s'(3) = 6\times3^2 + 3 = 57$; $a(3) = s''(3) = 12\times3 = 36$.

Правило Лопиталя

Пусть в некотором интервале, содержащем точку a (кроме, быть может, самой точки a), функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы и $g'(x) \neq 0$. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если предел в правой части этого равенства существует. Если же $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \lim\limits_{x\to a} g'(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \lim\limits_{x\to a} g'(x) = \infty$, то переходят к рассмотрению вторых производных и т. д.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$.

Решение. Пусть $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x$. Вычислим пределы $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0}.$$

Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

Упражнения 4.3

1. Найти тангенс угла наклона касательной к кривой $y = 3x^2 + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ к положительно направленной оси OX.

2. Найти мгновенную скорость в момент времени $t_0 = 2$ материальной точки, проходящей за время t расстояние $s(t) = t^3 + 3t$.

3. Найти мгновенное ускорение в момент времени $t_0 = 2$ материальной точки, проходящей за время t расстояние $s(t) = t^3 + 3t$.

4. Найти четырнадцатую производную функций $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $y = x^3$.

5. Найти шестую производную функции $y = e^{2x}$.

6. Используя правило Лопиталя, найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$.

Тест

1. Производная постоянной функции $y = -1$ равна: а) 1; б) 2; в) 3; г) 0; д) –1.

2. Укажите неверное равенство: а) $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}(x^2)'$, б) $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{(x^2)'}{2}$, в) $\left(\frac{2}{x^2}\right)' = \frac{2}{(x^2)'}$, г) $\left(\frac{2}{x^2}\right)' = 2\left(\frac{1}{x^2}\right)'$, д) $(2x^2)' = 2(x^2)'$.

3. Какое равенство является верным: а) $\left(\frac{2x^2}{\sin(x)}\right)' = \frac{(2x^2)'}{(\sin(x))'}$,

б) $(2x^2\sin(x))'=(2x^2)'(\sin(x))'$,

в) $(2x^2\sin(x))' = 2'(x^2\sin(x)) + 2(x^2\sin(x))'$, г) $\left(\frac{2x^2}{\sin(x)}\right)' = \frac{2'(x^2)'}{(\sin(x))'}$,

д) $(2x^2 + \sin(x))' = (2x^2)'\sin(x) + 2x^2(\sin(x))'$?

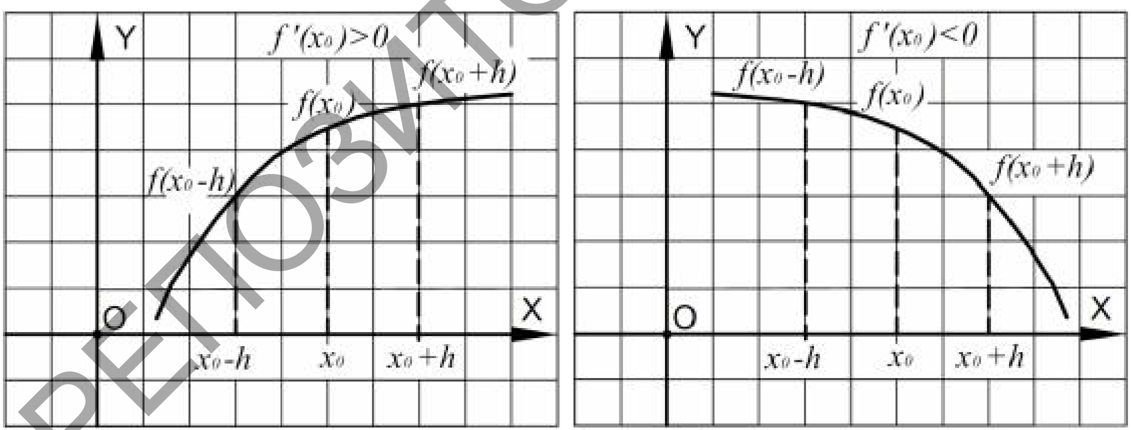
4. Первая производная функции $\cos(\ln(x))$ равна: а) $\frac{1}{\cos(x)}$, б) $-\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, в) $-\frac{1}{x}\sin(x)$, г) $-\frac{1}{x}\sin(\ln(x))$, д) $\cos\left(\frac{1}{x}\right)\sin(\ln(x))$.

5. Пусть материальная точка проходит за время t расстояние $s(t)$. Величина $s'(t_0)$ равна: а) скорости точки в момент времени t_0; б) ускорению точки в момент времени t_0; в) пути, пройденному точкой за время t_0; г) средней скорости точки на промежутке времени $[0, t_0]$; г) среднему ускорению точки на промежутке времени $[0, t_0]$.

4.4. Применение производных к исследованию функций

Одним из этапов исследования функции является изучение *монотонности функции*, другими словами, определение промежутков ее возрастания и убывания.

Возрастание и убывание функции



а) $f(x)$ возрастает в точке x_0 б) $f(x)$ убывает в точке x_0

Рис. 11. Поведение функции в точке x_0

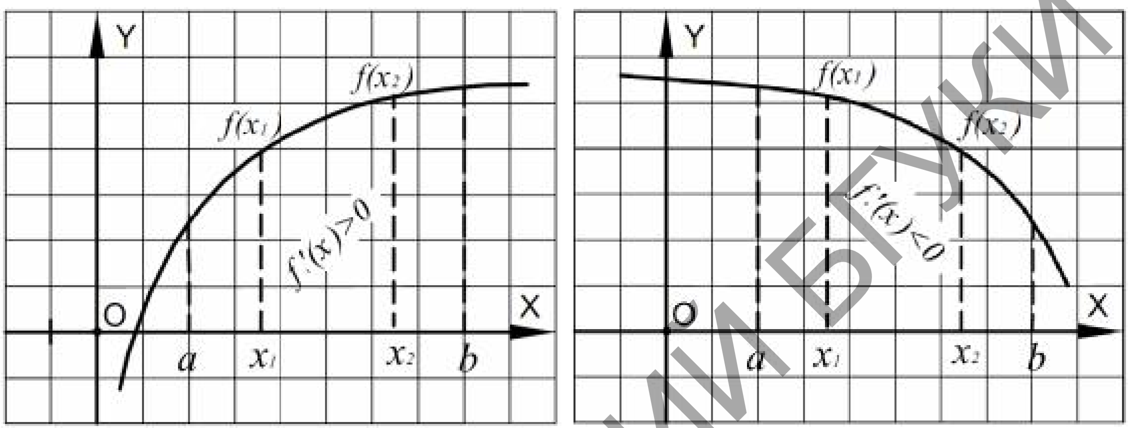
Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b). Если в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ при любом достаточно малом $h > 0$ выполняется условие (рис. 11а)

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h),$$

функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке* x_0, если же выполняется условие (рис. 11б)

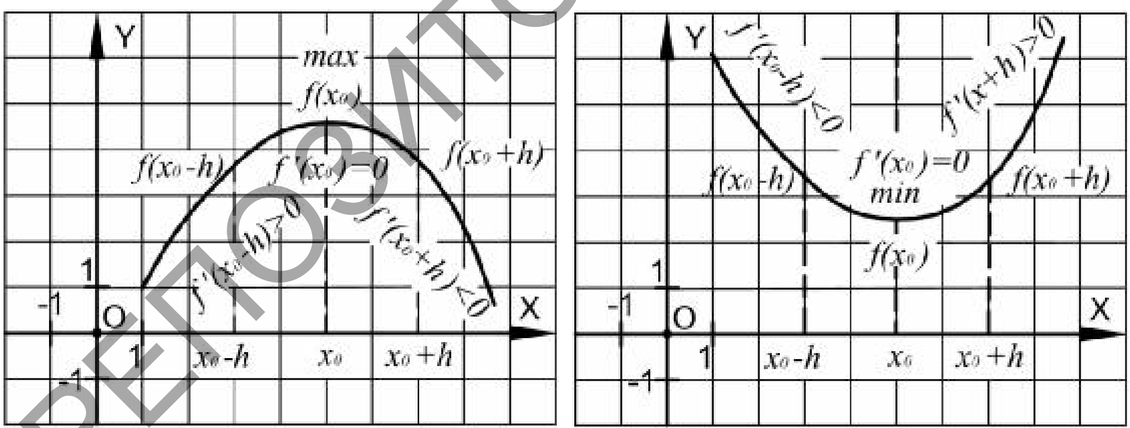
$$f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h),$$

функция называется *убывающей в точке* x_0. Функция возрастающая (убывающая) в каждой точке интервала (a, b) называется *возрастающей* (*убывающей*) *на этом интервале*. Приведем определение, альтернативное последнему: если для любых двух точек x_1 и x_2 из интервала (a, b), удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, для функции $f(x)$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, функция $f(x)$ называется *возрастающей на интервале* (a, b) (рис. 12а); неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, функция $f(x)$ называется *убывающей на интервале* (a, b) (рис. 12б).



а) $f(x)$ возрастает на (a,b) б) $f(x)$ убывает на (a,b)

Рис. 12. Поведение функции на промежутке (a,b)



а) локальный максимум б) локальный минимум

Рис. 13. Точки локального экстремума функции

Если в некотором достаточно малом интервале, содержащем точку x_0, при любом достаточно малом $h > 0$, выполняются: 1) условия $f(x_0 - h) < f(x_0)$ и $f(x_0 + h) < f(x_0)$, то значение $f(x_0)$ называется *локальным максимумом функции* $f(x)$ (рис. 13а), а точка x_0 – точкой *локального максимума*; 2) условия $f(x_0 - h) > f(x_0)$ и $f(x_0 + h) > f(x_0)$, то значение $f(x_0)$

называется *локальным минимумом функции* $f(x)$ (рис. 13б), а точка x_0 – точкой *локального минимума*.

В дальнейшем слово *локальный* будем опускать. Максимум или минимум функции называется *экстремумом функции*. Точка максимума или минимума функции называется *точкой экстремума функции*.

Приведем правила, помогающие исследовать функцию на возрастание – убывание и находить точки ее экстремумов.

I. *Признаки возрастания и убывания функции*: если $f'(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает в точке x_0, если $f'(x_0) < 0$ – убывает в этой точке.

II. *Необходимое условие экстремума:* если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то производная $f'(x_0)$ обращается в этой точке в нуль или не существует.

Точка x_0, в которой $f'(x_0) = 0$, называется *стационарной точкой*. Точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, называются *критическими точками*. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

III. *Достаточные условия экстремума:*

Правило 1. Если x_0 – критическая точка функции $f(x)$ и при произвольном достаточно малом $h > 0$ выполняются неравенства $f'(x_0 - h) > 0$, $f'(x_0 + h) < 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум (рис. 13а); если же $f'(x_0 - h) < 0$, $f'(x_0 + h) > 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет минимум (рис. 13б).

Примечание. Если знаки $f'(x_0 - h)$ и $f'(x_0 + h)$ одинаковы, то функция $f(x)$ в точке x_0 экстремума не имеет.

Правило 2. Если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, а именно максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Правило 3. Пусть $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, ..., $f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, тогда функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум. Если n – четное число: x_0 – точка максимума при $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 – точка минимума при $f^{(n)}(x_0) > 0$. Если n – нечетное число: x_0 – точка максимума при $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 – точка минимума при $f^{(n)}(x_0) < 0$.

На практике часто возникает задача нахождения на отрезке $[a, b]$ наибольшего или наименьшего значения функции $f(x)$. Для ее решения достаточно из значений функции на границах отрезка и в критических точках, принадлежащих этому отрезку, выбрать наибольшее либо наименьшее значение.

Примеры:

1) Определить интервалы возрастания и убывания функции $y = x^3 - 6x^2$, найти ее точки максимума и минимума.

Решение. Найдем первую производную функции и приравняем ее к нулю: $y' = 3x^2 - 12x = 0$. Решив полученное квадратное уравнение, найдем стационарные точки: $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$.

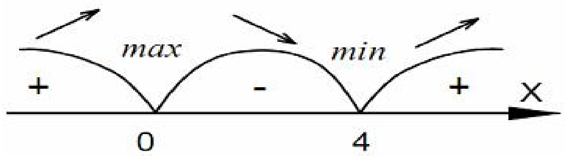


Рис. 14. Промежутки знакопостоянства производной y'

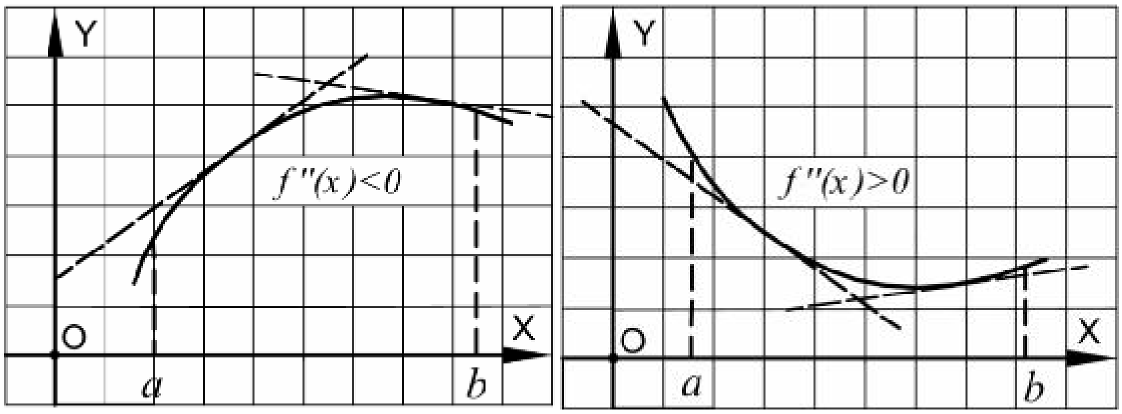
Определим промежутки постоянства знака производной (рис. 14): $y' > 0$ на $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ и $y' < 0$ на $(0,4)$. Таким образом, функция возрастает на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(4, +\infty)$, а убывает на интервале $(0, 4)$. Согласно правилу 1 в точке $x_1 = 0$ функция имеет максимум, а в точке $x_2 = 4$ – минимум.

2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 6x^2$ на отрезке $[-1, 7]$.

Решение. С помощью первой производной $y' = 3x^2 - 12x$ находим стационарные точки: $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$: Определяем значения функции в этих точках: $f(0) = 0$, $f(4) = -32$. Вычисляем значения функции на границах промежутка: $f(-1) = -7$, $f(7) = 49$. Из полученных четырех значений выбираем наибольшее и наименьшее. Итак, наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $[-1, 7]$ равны -32 и 49.

Выпуклость и вогнутость функции

Очередной этап исследования функции связан с определением интервалов, на которых график функции является *выпуклым* (выпуклым вверх), т. е расположен ниже касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис. 15а), либо *вогнутым* (выпуклым вниз), т. е. расположен выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис. 15б).



а) график выпуклый на (a, b) б) график вогнутый на (a,b)

Рис. 15. Направление выпуклости графика функции

*Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции***.** Если $f''(x) < 0$ на интервале (a, b), то график функции является выпуклым на этом интервале; если же $f''(x) > 0$, то на интервале (a, b) график функции – вогнутый.

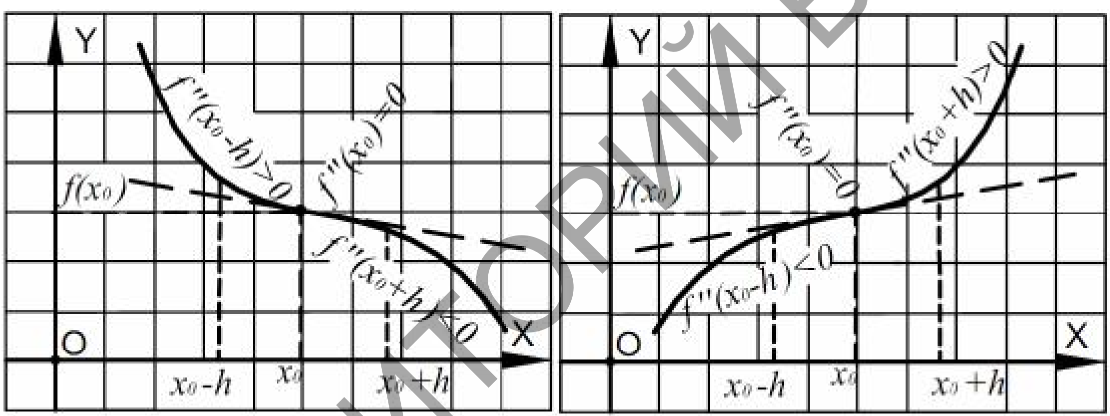


Рис. 16. Точки перегиба функции

Точка $(x_0, f(x_0))$ функции, в которой ее график меняет направление выпуклости, *называется точкой перегиба* (рис. 16).

Необходимые условия перегиба. Если x_0 – абсцисса точки перегиба графика функции $y = f(x)$, то вторая производная $f''(x_0)$ равна нулю или не существует.

Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками* II *рода*.

Достаточное условие перегиба. Если x_0 – критическая точка II рода и при произвольном достаточно малом $h > 0$ выполняются неравенства $f''(x_0 - h) > 0$, $f''(x_0 + h) < 0$ или неравенства $f''(x_0 - h) < 0$, $f''(x_0 + h) > 0$, то точка кривой $y = f(x)$ с абсциссой x_0 является точкой перегиба (рис. 16).

Если же $f''(x_0 - h)$ и $f''(x_0 + h)$ имеют одинаковые знаки, то точка кривой $y = f(x)$ с абсциссой x_0 не является точкой перегиба.

Пример.

Исследовать на выпуклость и вогнутость график функции $y = x^3 - 6x^2$.

Решение. Найдем вторую производную:

$$y'' = (y')' = (3x^2 - 12x)' = 6x - 12.$$

Приравняем производную к нулю: $6x - 12 = 0$, и решив полученное уравнение, найдем стационарную точку II рода: $x = 2$.

Рис. 17. Промежутки знакопостоянства производной y''

Таким образом, $y'' < 0$ на $(-\infty, 2)$ и $y'' > 0$ на $(2, +\infty)$, а следовательно, график функции выпуклый на $(-\infty, 2)$ и вогнутый на $(2, +\infty)$ (рис. 17).

Построение графика функции

Схема построения графика функций:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность и нечетность;

3) найти точки пересечения графика функции с осями координат;

4) исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва (если существуют) и установить характер разрыва; найти асимптоты кривой.

5) найти интервалы возрастания (убывания) и экстремумы функции;

6) найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки перегиба.

Примеры:

1. Построить график функции $y = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-2)^2}$.

1) Область определения $f(x)$ – вся ось OX, за исключением точки $x = 2$, т. е. $D(f) = R/\{2\}$. Точка $x = 2$ является точкой разрыва функции.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 3(-x)^2}{(-x-2)^2} = \frac{-x^3 - 3x^2}{(x+2)^2} \neq \left[\begin{matrix} f(x) \\ -f(x) \end{matrix}\right.$$

3) Найдем точки пересечения графика с осью OX:

$$\frac{x^3-3x^2}{(x-2)^2}=0, \text{ следовательно, } \begin{cases} x^3-3x^2=0, \\ (x-2)^2\neq 0. \end{cases}$$

Разложив числитель на множители $x^2(x-3)=0$, найдем точки, в которых он обращается в нуль: $x_1=0$, $x_2=3$; эти точки являются точками пересечения графика с осью OX.

4) В пункте 4.2 найдены асимптоты функции $y=\frac{x^3-3x^2}{(x-2)^2}$, вертикальная $x=2$ и наклонная $y=x+1$.

5) Определим экстремумы функции и интервалы возрастания и убывания. Найдем первую производную функции:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3-3x^2}{(x-2)^2}\right)'=\frac{x^3-6x^2+12x}{(x-2)^3}.$$

Найдем *критические точки* (в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует). Решим уравнение $x^3-6x^2+12x=0$. Вынесем за скобки x: $x(x^2-6x+12)=0$. Квадратное уравнение в скобках решений не имеет, поскольку его дискриминант отрицателен, таким образом, единственным корнем уравнения является $x=0$. Производная $f'(x)$ обращается в ноль в точке $x=0$ и не существует в точке $x=2$. Определим промежутки постоянства знака первой производной (рис. 18). Точки $x=0$ и $x=2$ разбивают числовую ось на промежутки: $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$, причем $f'(x)>0$ в промежутках $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$; $f'(x)<0$ в промежутке $(0, 2)$, следовательно, функция возрастает на $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$ и убывает на $(0, 2)$.

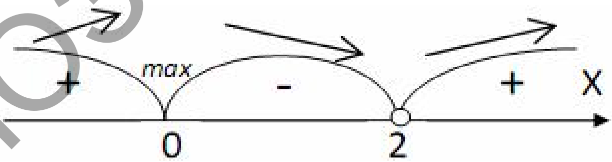


Рис. 18. Промежутки знакопостоянства производной y'

Согласно правилу 1, точка $x=0$ является точкой максимума функции, причем $f(0)=0$. Точка $x=2$ – точка разрыва функции.

6) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки ее перегиба с помощью второй производной:

$$f''(x)=-\frac{24}{(x-2)^4}.$$

Легко заметить, что $f''(x)>0$ для всех x из области определения функции, следовательно, график функции всюду выпуклый. Точек перегиба кривая не имеет.

7) Используя полученные данные, строим график (рис. 20).

2. Построить график функции $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x - 48$.

1) Функция $f(x)$ – многочлен, а у всех многочленов область определения – вся вещественная ось: $D(f) = R$.

2) Многочлены бывают четными функциями, если содержат только четные степени переменного x, и нечетными функциями, если содержат только нечетные степени переменного x. Функции $f(x)$ содержит как четные, так и нечетные степени переменного x, значит она не является ни четной, ни нечетной.

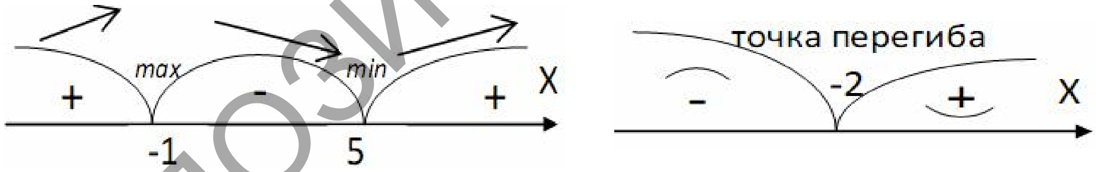
Периодическими из всех многочленов являются только постоянные, то есть не зависящие от x. В нашем случае $f(x)$ не является периодической функцией.

3) Вертикальных асимптот у графика нет, так как область определения не имеет точек разрыва и граничных точек.

4) Графики многочленов, степень которых больше 2, асимптот не имеют.

5) Определим экстремумы функции и интервалы возрастания и убывания.

Найдем производную функции: $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$; приравняв производную к нулю и решив полученное квадратное уравнение, найдем стационарные точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$.



а) y' б) y''

Рис. 19. Промежутки знакопостоянства производных

Точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$ разбивают числовую ось на промежутки: $(-\infty, -1)$, $(-1, 5)$, $(5, +\infty)$ (рис. 19а). Функция возрастает на промежутках $(-\infty, -1)$, $(5, +\infty)$, так как здесь $f'(x) > 0$ и убывает на интервале $(-1, 5)$, поскольку здесь $f'(x) < 0$.

В точке $x_1 = -1$ возрастание функции сменяется убыванием, следовательно, она является точкой локального максимума функции $f(x)$, причем $f(-1) = -56$. В точке $x_2 = 5$ убывание функции сменяется возрастанием, значит, эта точка – точка локального минимума функции $f(x)$, причем $f(5) = -52$.

7) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки ее перегиба. Для этого воспользуемся второй производной функции $f''(x)=6x+12$. Приравняв производную к нулю и решив уравнение $6x+12=0$, получим стационарную точку II рода $x=-2$. Точка $x=-2$ разбивает числовую ось на два промежутка (рис. 19.б): $(-\infty, -2)$, где $f''(x)<0$, и, следовательно, $f(x)$ – выпукла; $(-2, +\infty)$, где $f''(x)>0$, и, следовательно, $f(x)$ – вогнута. В точке $x=-2$ направление выпуклости меняется, значит, она является точкой перегиба, причем $f(-2)=-2$.

8) Используя полученные данные, строим график (рис. 21).

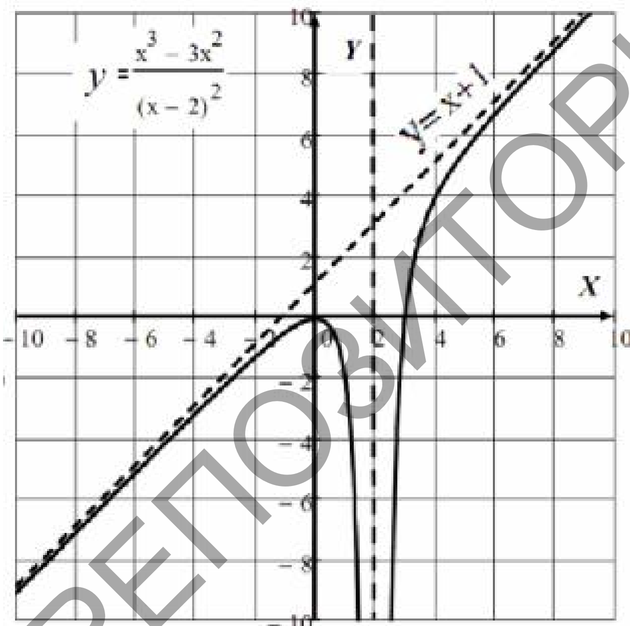


Рис. 20 $f(x)=\frac{x^3-3x^2}{(x-2)^2}$

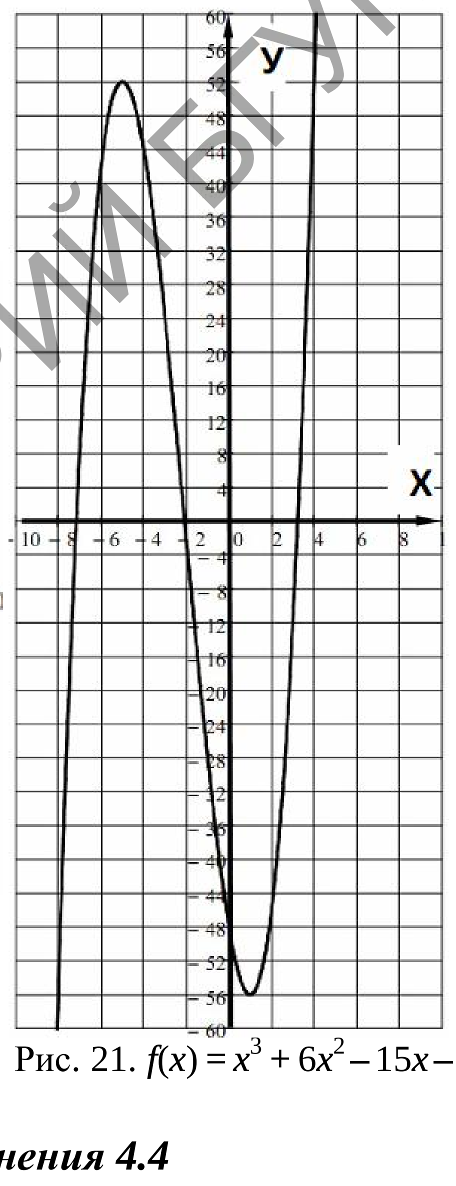


Рис. 21. $f(x)=x^3+6x^2-15x-48$

Упражнения 4.4

1. Функция $f(x)$ – непрерывна на полуинтервале $(a, +\infty)$, является возрастающей на этом полуинтервале, имеет отри-

цательную вторую производную и наклонную асимптоту $y = x$. График этой функции на полуинтервале $(a, +\infty)$ лежит выше либо ниже прямой $y = x$?

2. Функция $f(x)$ такова, что $f''(x) > 0$ на интервале (a, b). График функции $f(x)$ лежит выше либо ниже касательной в точке с абсциссой $x_0 \in (a, b)$?

3. Сколько точек (локального) максимума имеет функция $y = \sin(x)$ на: а) R, б) $[0, 3\pi]$, в) $[-2\pi, 3\pi]$? В скольких точках обращается в нуль первая производная функции $y = \sin(x)$ на: а) R, б) $[0, 3\pi]$, в) $[-2\pi, 3\pi]$?

4. Функция $y = \mathrm{tg}(x)$ задана на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$. Найти количество точек функции, являющихся на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$: а) критическими, б) точками экстремума, в) критическими точками II рода, г) точками перегиба.

5. Приведите примеры многочленов (не менее трех), являющихся на R: а) возрастающими, б) убывающими, в) четными, г) нечетными.

Тест

1. Функция $f(x)$ такова, что $f'(x) > 0$ на интервале (a, b). Какое из следующих утверждений для функции $f(x)$ является истинным: а) $f(x)$ возрастает на (a, b), б) $f(x)$ убывает на (a, b), в) $f(x)$ является постоянной на (a, b), г) $f(x)$ имеет на (a, b) точку максимума, д) $f(x)$ имеет на (a, b) точку минимума ?

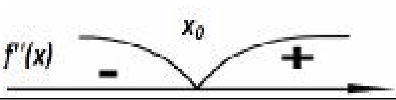
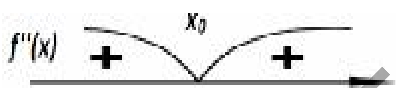
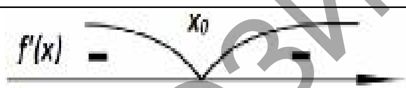
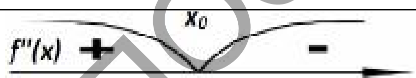
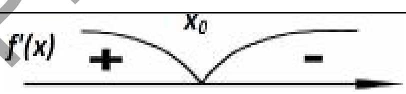
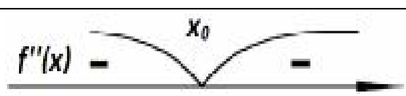
2. Непрерывная функции $f(x)$ такова, что график функции является выпуклым на интервале (a, b). Какое из следующих утверждений для второй производной функции $f''(x)$ при $x \in (a, b)$ является истинным: а) $f''(x) > 0$, б) $f''(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$, в) $f''(x) < 0$, г) $f''(x)$ меняет знак на (a, b), д) $f''(x) = |a|$.

3. Функция $f(x)$ на (a, b) непрерывна, убывает и имеет вертикальную асимптоту $x = a$. Предел $f(x)$ при $x \to a$ равен: а) $+\infty$, б) $-\infty$, в) $f(a)$, г) 0, д) $f(x)$ не имеет предела при $x \to a$.

4. Поставьте в соответствие функциям а)–г) описание их монотонности 1)–5):

а) $y = x^2$	1) возрастает на R
б) $y = \sin(x)$	2) убывает на R
в) $y = \mathrm{arcctg}(x)$	3) имеет на R бесконечное количество промежутков возрастания и убывания
г) $y = e^x$	4) убывает при всех отрицательных x и возрастает при всех положительных x
д) $y = \ln(x)$	5) не существует при отрицательных x и возрастает при всех положительных x

5. Поставьте в соответствие схеме а)–з) постоянства знака производной вблизи критической точки x_0 определение этой точки 1)–8).

а) 	1) x_0 – точка максимума
б) 	2) x_0 – точка минимума
в) 	3) x_0 – точка перегиба
г) 	4) x_0 не является точкой экстремума
д) 	5) x_0 не является точкой перегиба
е) 	6) x_0 не является точкой экстремума
ж) 	7) x_0 не является точкой перегиба
з) 	8) x_0 – точка перегиба

Задачи

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} e^x$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} e^x$.

Используя основные замечательные пределы, вычислить:

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(9x^7)}{x^7}+\sqrt{x^2+4}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(15x^5)}{x^5\cos(x^5)}\right)$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{13x^4}\right)^{x^4}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^7)^{\frac{1}{x^7}}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin(3x))^{\frac{1}{\sin(3x)}}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^7)^{\frac{\sin(5x^2)}{x^9}}$.

Используя правила I, II и VI из п. 4.2, вычислить пределы:

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x}$.
10. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}}$.
11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln\dfrac{1}{x}$.
12. $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{\sqrt{(3-x)^2}}{(2-x)^3}$.
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x+1}$.
14. $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\cos(x)}{e^{\frac{1}{x}}}$

Используя правила VII и VIII из п. 4.2, вычислить пределы:

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^7+2x^5-x}{x^2+1}$.
16. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{-3x^7+7x^2}{-x^3}$.
17. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-5x^6+2x^5-x}{8x^6+1}$.
18. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{-5x^6+2x^5-x}{8x^6+1}$.

С помощью правила Лопиталя вычислить пределы:

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin(x)}{x^3}$.
20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

Вычислить пределы:

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{6x^9}\right)^{(x+1)^6(2x+1)^3}$.
22. $\lim\limits_{x\to 0}(1+16x^8)^{\frac{\sin(3x^5)}{x^{13}}}$.

Найти первую производную функций:

23. $y=2x^8+4\sin(x)$, $y=5x^9-3\mathrm{tg}(x)$, $y=3x^6++\ln(x)$.
24. $y=\sqrt{x}\cdot\arccos(x)$, $y=x^4\ln(x)$, $y=e^x\mathrm{ctg}(x)$.
25. $y=\dfrac{\sin(x)}{x^3}$, $y=\dfrac{x^4}{\ln(x)}$, $y=\dfrac{e^x}{\mathrm{tg}(x)}$.
26. $y=\sin(3x)$, $y=e^{2x}$, $y=(2x+3)^5$, $y=\sqrt{\ln(x)}$, $y=\sin(e^x)$, $y=e^{\mathrm{tg}(x)}$, $y=\arcsin(\ln(\sqrt{x}))$.

27. $y = \frac{3x^2 + e^x}{\sin(e^x)}$, $y = \sqrt{\ln(x)}\,(\sin(x) + 2x^4)$.

28. Найти y'' и y''' для функций: а) $y = 2x^8 + 4\sin(x)$, б) $y = 2e^x + 4x^5$, в) $y = e^{2x} + 4\ln(x)$, г) $y = (2x+3)^5$.

29. Составить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0: а) $y = x^3 + 4x$, $x_0 = 1$, б) $y = e^{3(x-3)}$, $x_0 = 3$, в) $y = \sqrt{x^3 + 1}$, $x_0 = 2$.

30. Исследовать функции: а) $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 23$, б) $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$.

5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$. Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все первообразные содержатся в выражении $F(x) + C$, где C – постоянная: $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$.

5.1. Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (или от выражения $f(x)dx$ называется совокупность всех ее первообразных. Обозначение:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Здесь $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием функции.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $\int dF(x) = F(x) + C$.
3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, где a – постоянная.
4. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.
5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = u(x)$, то

$$\int f(u(x))d(u(x)) = F(u(x)) + C.$$

Формулы для вычисления интегралов основных элементарных функции можно получить, используя таблицу их производных и определение первообразной.

Таблица основных интегралов

1. $\int 1dx = x + C$
2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
3. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$
5. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$
6. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$
7. $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
8. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
9. $\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \mathrm{tg}(x) + C$
10. $\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = \mathrm{ctg}(x) + C$
11. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}(x) + C$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$

Примеры. Найти следующие интегралы:

1. $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx$.

Решение. Используя свойства интегралов 3 и 4, получаем

$\int (9x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx = 9\int x^3dx - 5\int x^2dx + 7\int xdx - 3\int 1dx$.

Применив к первым трем интегралам правой части формулу 2 из *таблицы основных интегралов*, а к четвертому – формулу 1, получим искомое значение:

$$9\frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} - 3x + C.$$

2. $\int \cos(\sin(x))\cos(x)dx$.

Решение. Свойство 5 позволяет вычислять интегралы с помощью подведения функции под знак дифференциала. Пусть $u(x) = \sin(x)$, тогда $d(u(x)) = d(\sin(x)) = (\sin(x))'dx = \cos(x)dx$. Преобразовав исходный интеграл, найдем его по формуле 8: $\int \cos(\sin(x))\cos(x)dx = \int \cos(u)du = \sin(u) + C = \sin(\sin(x)) + C$.

Опираясь на свойство 5, можно сформулировать следующие правила.

Правила замены переменной в неопределенном интеграле.

1. Пусть $x = u(t)$, где $u(t)$ – функция новой переменной t ,– монотонная, дифференцируемая, имеющая непрерывную производную, тогда переход от переменной x к переменной t осуществляется по формуле

$$\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt.$$

2. Пусть $u = g(t)$, где u – новая переменная, тогда переход от переменной t к переменной u осуществляется по формуле

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(u)du.$$

Примеры. Найти следующие интегралы:

1. $\int \cos(t)\sin^2(t)\,dt$.

Решение. Воспользуемся правилом 2 замены переменной: $u = \sin(t)$, $du = d(\sin(t)) = (\sin(t))'dt = \cos(t)$, следовательно, $\int \cos(t)\sin^2(t)\,dt = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3(t)}{3} + C$.

2. $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx}$.

Решение. Воспользуемся правилом 1 замены переменной: $x = \cos(t)$, $dx = (\cos(t))'dt = -\sin(t)dt$, тогда $\int \sqrt{1-x^2}\,dx =$ $= \int \sqrt{1-\cos^2(t)}\,\sin(t)\,dt = -\int \sqrt{\sin^2(t)}\,\sin(t)\,dt = -\int \sin^2(t)\,dt =$ $= -\int \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}\int(\cos(2t)-1)dt$.

Чтобы найти последний интеграл, заменим $z = 2t$, $dz = (2t)'dt$, тогда $\frac{1}{2}\int(\cos(2t)-1)dt = \frac{1}{4}\int(\cos(z)-1)dz = \frac{1}{4}(\sin(z)-z) + C$.

Вернемся к переменной t:

$$\frac{1}{4}(\sin(z)-z) + C = \frac{1}{4}(\sin(2t)-2t) + C.$$

Вернемся к переменной x: из уравнения $x = \sin(t)$ найдем $t = \arcsin(x)$, следовательно,

$$\frac{1}{4}(\sin(2t)-2t) = \frac{1}{4}(\sin\big(2\arccos(x)\big) - 2\arccos(x)) =$$
$$= \frac{1}{4}(2\sin(\arccos(x))\cos(\arccos(x)) - 2\arccos(x)) =$$
$$= \frac{1}{2}(\cos(\arccos(x)\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x)} - \arccos(x)) =$$

= [так как $\cos(\mathrm{arcos}(x)) = x$] $= \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} - \arccos(x))$.

Таким образом: $\int \sqrt{1-\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{1-x^2} - \arccos(x)\Big) + C$.

Приведем несколько полезных формул:

I. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

II. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|(x)| + C$.

III. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$.

Формулы I–III нетрудно получить, используя правила замены переменной в неопределенном интеграле.

Примеры:

1. $\int \sin(7x+5)\,dx = -\frac{1}{7}\cos(7x+5) + C$.

2. $\int \frac{3x^2}{x^3+5}dx = \ln|x^3+5| + C$ (учитывая, что $(x^3+5)' = 3x^2$, мы воспользовались формулой II).

3. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+5}}dx = 2\sqrt{x^3+5} + C$ (учитывая, что $(x^3 + 5)' = 3x^2$, мы воспользовались формулой III).

Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du,$$

где $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от x.

С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int u\, dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v\, du$; таким образом, ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен. При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден. Так, например, для интегралов

$$\int P(x)e^x dx,\ \int P(x)\sin(ax)dx,\ \int P(x)\cos(ax)dx,$$

где $P(x)$ – многочлен, за u следует принять $P(x)$, а за dv – соответственно выражения $e^{ax}dx$, $\sin(ax)dx$, $\cos(ax)dx$; для интегралов вида

$$\int P(x)\ln(x)dx,\ \int P(x)\arcsin(x)dx,\ \int P(x)\arccos(x)dx$$

за u принимаются соответственно функции $\ln(x)$, $\arcsin(x)$, $\mathrm{arcos}(x)$, а за dv – выражение $P(x)dx$.

Примеры. Найти следующие интегралы:

1. $\int \ln(x)dx$.

Решение. Положим $u = \ln(x)$, $dv = dx$; тогда $v = x$, $du = -\frac{1}{x}dx$. Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{dx}{x} = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + C.$$

2. $\int x\sin(x)dx$.

Решение. Положим $u = x$, $dv = \sin(x)dx$; тогда $du = dx$, $x = -\cos(x)$. Отсюда

$$\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) - \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C.$$

3. $\int e^x \sin(x)dx$.

Решение. Пусть $u = e^x$, $dv = \sin(x)dx$, тогда $du = e^x dx$, $v = -\cos(x)$, и $\int e^x\sin(x)dx = -e^x\cos(x) - \int e^x\cos(x)dx$. Создается впечатление, что интегрирование по частям не привело к цели, так как интеграл не упростился. Попробуем еще раз проинтегрировать по частям. Примем $u = e^x$, $dv = \cos(x)dx$, тогда $du = e^x dx$, $u = \sin(x)$, и $\int e^x\sin(x)dx = -e^x\cos(x) + (e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)dx)$, т.е. $2\int e^x\sin(x)dx = -e^x\cos(x) + e^x\sin(x)$, следовательно, $\int e^x\sin(x)dx = 0.5e^x(\cos(x) + \sin(x)) + C$.

Упражнения 5.1

1. Сколько первообразных имеет функция $y = x^3 + 3$?

2. Какую замену переменной можно сделать для вычисления интеграла (объясните свой выбор):а) $\int x^2\sqrt{1-x^3}\,dx$, б) $\int \sin(t)\cos^3(t)\,dt$, в) $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$?

3. Какую из функций следует принять за u, а какую за dv для нахождения интеграла $\int udv$ с помощью интегрирования по частям (объясните свой выбор): а) $\int (x^2 + 3)\sin(x)dx$, б) $\int x\ln(x)dx$, в) $\int xe^x dx$?

4. Найти интеграл а) $\int \sin(2x)dx$, б) $\int e^{3x+1}dx$.

5. Выразите первообразную $F(x)$ функции $f(x)$ через ее производную $f'(x)$, если: а) $f(x) = \cos(x)$, б) $f(x) = \sin(2x)$ в) $f(x) = e^{3x+1}$.

Тест

1. Какая из следующих функций является первообразной функции $y = x^3 + 5$: а) $3x^2$, б) $0{,}25x^4 + 5x + 2$, в) $x^4 + 5x$, г) $3x^2 + 3$, д) $x^2 + 5$.

2. Поставьте в соответствие выражениям а)–д) тождественные им выражения 1)–5).

а) $(\int x^5\,dx)'$	1) $6x^5$
б) $(x^6)'$	2) x^5
в) $\int x^4\,dx$	3) $5x^5$
г) $\int (x^5)'\,dx$	4) $\frac{1}{5}x^5 + C$
д) $(\int 5x^5\,dx + 5)'$	5) $x^5 + C$

3. Поставьте в соответствие интегралам а)–д) правила, по которым их, с вашей точки зрения, можно найти наилучшим способом 1)–5).

а) $\int \operatorname{tg}(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$	1) $\int f(g(t))g(t)dt = \int f(u)du$
б) $\int x\cos(x)dx$	2) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$
в) $\int \frac{x^6}{\sqrt{x^7+9}}dx$	3) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
г) $\int \cos(9x+2)dx$	4) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$
д) $\int xe^{x^2}dx$	5) $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

4. Какое из следующих выражений является верным:
а) $\int x^6 \sin(x)\,dx = \int x^6\,dx \int \sin(x)\,dx$,
б) $\int (x^6 + \sin(x))\,dx = \int x^6\,dx + \int \sin(x)\,dx$,
в) $\int \frac{x^6}{\sin(x)}dx = \frac{\int x^6\,dx}{\int \sin(x)}dx$,
г) $(\int (x^6 + \sin(x)))'dx = x^6 + \sin(x) + C$.

5. Для какой из следующих основных элементарных функций выполняется условие $f(x) = f'(x) = F(x)$: а) $f(x) = \sin(x)$, б) $f(x) = x$, в) $f(x) = 1$, г) $f(x) = 1/x$, д) $f(x) = e^x$.

5.2. Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ не изменяет знак на отрезке $[a, b]$. Фигура, ограниченная графиком функции $f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс, называется *криволинейной трапецией* (рис.1. Фигура $ABCD$).

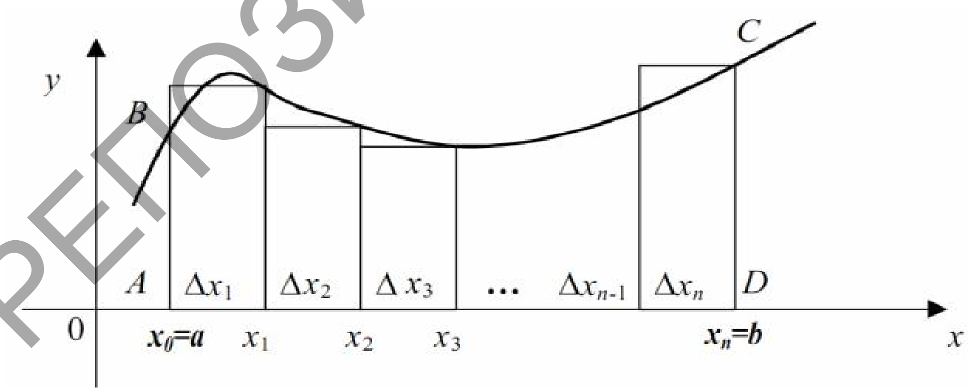


Рис. 1. Геометрический смысл определенного интеграла

Вычислим площадь криволинейной трапеции. Разделим отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Положим, $x_0 = a$ и $x_n = b$. Найдем длину каждого отрезка $\Delta x_i = \Delta x = (b - a)/n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Проведем через точки прямые $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, параллельные оси OY. На каждом отрезке Δx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ построим прямоугольник, высота которого равна $f(x_i)$, $x_i = a + i\Delta x$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда площадь каждого прямоугольника равна $S_i = f(x_i)\Delta x_i = f(x_i)\Delta x$, $i = 1, 2, \dots, n$. Площадь криволинейной трапеции $ABCD$ приближенно равна сумме площадей всех прямоугольников:

$$S_{ABCD} \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Выражение в правой части равенства называется *интегральной суммой*.

Если увеличить число отрезков n, на которые мы делим $[a, b]$, то можно получить более точное значение площади трапеции $ABCD$. Если существует предел интегральной суммы при $n \to \infty$, то этот предел является площадью криволинейной трапеции $ABCD$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = S_{ABCD}.$$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (или в пределах от a до b) называется предел интегральной суммы:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

где a – нижний предел интегрирования, b – верхний предел интегрирования.

Теорема существования определенного интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на элементарные отрезки.

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

$$4.\ \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

$$5.\ \int_a^b C\,f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

Теорема Ньютона – Лейбница. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Примеры:

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_1^4 \sqrt{x}dx$.

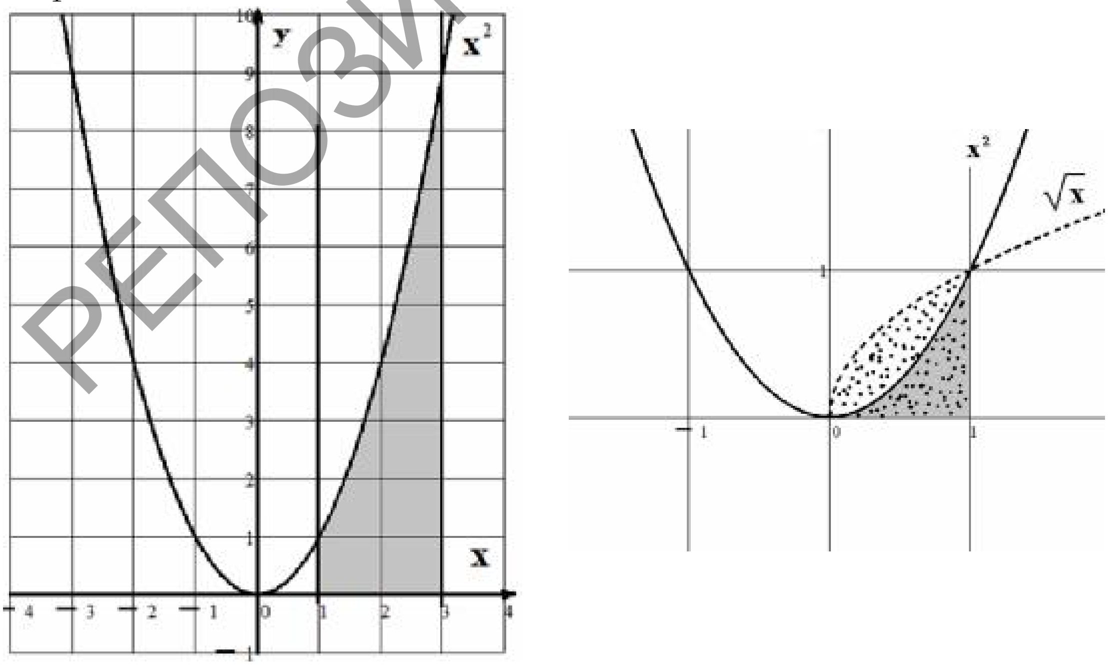
Решение.

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}4\sqrt{4} - \frac{2}{3}1\sqrt{1} = \frac{14}{3}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 1$ и $x = 3$.

Решение. На рисунке 2а изображена криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = x^2$ и прямыми $x = 1$ и $x = 3$, площадь которой есть определенный интеграл

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^3 = \frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{3}1^3 = 8\frac{2}{3}.$$



а) криволинейная трапеция, ограниченная $y = x^2$, $x = 1$ и $x = 3$

б) криволинейная трапеция, ограниченная $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

Рис. 2. Криволинейные трапеции

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченную кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Решение. Для наглядности построим графики функций $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ (рис. 2б). Кривые пересекаются в двух точках, абсциссы которых найдем, решив уравнение: $x^2 = \sqrt{x}$, $\Rightarrow$ $x^4 = x, \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0, \Rightarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Площадь фигуры, ограниченную кривой $y = x^2$ и прямыми $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ (на рисунке 2б фигура, заштрихованная точками), вычислим с помощью определенного интеграла

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченную кривыми $y = x^2$ и прямыми $x = 0$ и $x = 1$(на рисунке 2б фигура серого цвета), найдем с помощью интеграла

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Площадь искомой криволинейной трапеции будет равна разности полученных значений, т.е. $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Упражнения 5.2

1. Не вычисляя определенный интеграл, найти его значение, исходя из геометрического смысла: а) $\int_0^2 2xdx$, б) $\int_0^2 xdx$, в) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$.

2. Вычислить определенный интеграл $I = \int_{-p}^{p} \sin(x)dx$ и площадь S, ограниченную кривой $y = \sin(x)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ и осью OX. Верно ли, что $S = I$? Объясните почему.

3. Найти значение определенного интеграла $\int_{-a}^{a} f(x)dx$, если известно, что функция $f(x)$ нечетная.

4. Пусть G – фигура, ограниченная осью OX, прямыми $x = a$, $x = b$ и кривой $y = f(x)$. Будет ли интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади фигуры G, если: а) функция $f(x)$ меняет знак на

отрезке $[a, b]$, б) функция $f(x)$положительна на отрезке $[a, b]$, в) функция $f(x)$ отрицательна на отрезке $[a, b]$. Объясните свой ответ.

5. Верно ли, что $\int_{-b}^{b} f(x)dx = 2\int_{0}^{b} f(x)dx$, если: а) функция $f(x)$ нечетная на $[-b, b]$, б) функция $f(x)$ четная на $[-b, b]$, в) функция $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной на $[-b, b]$. Объясните свой ответ.

Тест

1. Какое из следующих равенств является неверным:
а) $\int_{2}^{4} x^3dx = -\int_{4}^{2} x^3dx$, б) $\int_{2}^{4} x^3dx = \int_{2}^{3} x^3dx + \int_{4}^{3} x^3dx$, в) $\int_{2}^{2} x^3dx = 0$, г) $\int_{2}^{4} 3x^3dx = 3\int_{2}^{4} x^3dx$, д) $\int_{2}^{4} (x^3 - x^2)dx = \int_{2}^{4} x^3dx - \int_{2}^{4} x^2dx$.

2. Определенный интеграл $\int_{a}^{b} f(t)dt$ равен: а) площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, прямыми $t = a$, $t = b$ и кривой $y = f(t)$, б) пути, пройденному материальной точкой на отрезке времени $t \in [a, b]$, скорость которой на этом отрезке определяется функцией $y = f(t)$; в) средней скорости материальной точки на отрезке времени $t \in [a, b]$, ускорение которой на этом отрезке определяется функцией $y = f(t)$.

3. Чему равен определенный интеграл $\int_{-1}^{1} 2x\mathrm{d}x$: а) 0, б)1, в) 2, г) –1, д) x.

4. Площадь фигуры, ограниченная прямыми $y = 0$, $y = 2x$, $x = -1$, $x = 1$, равна: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4.

5. Поставить в соответствие математическому понятию а)–в) конструкцию1)–3), которая его определяет:

а) производная от функции $f(x)$	1) $F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$
б) неопределенный интеграл от функции $f(x)$	2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

	$x_i = a + i\Delta x,\ i = 1,2, \ldots, n$
в) определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$	3) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Задачи

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int (3\sin(x) - 5x^3)dx.$
2. $\int \frac{1}{\sin^2(5x+2)}dx,\ \int \frac{1}{4x+5}dx,$ $\int \cos(9x+2)dx.$
3. $\int (3\frac{1}{1+x^2} + (7x+4)^{10})dx.$
4. $\int \frac{1}{(x+1)^2}dx.$
5. $\int \frac{x}{(x+1)^2}dx,\ \int \frac{x}{(x+1)^3}dx.$
6. $\int \frac{x}{x^2-1}dx,\ \int \frac{x^3}{x^4+1}dx.$
7. $\int x^2\sqrt{1-x^3}\,dx.$
8. $\int \sin(t)\cos^3(t)\,dt.$
9. $\int \frac{\ln(x)}{x}dx.$
10. $\int \mathrm{tg}(x)\,dx,\ \mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$
11. $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}dx,\ \int \frac{x^6}{\sqrt{x^7+9}}dx.$
12. $\int xe^{x^2}dx, \int e^x\sqrt{e^x}\,d\,x,\ \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$
13. $\int (3\ln(x) - 4)^5 \frac{dx}{x}.$
14. $\int x\ln(x)dx.$
15. $\int xe^x dx,\ \int x^2e^x dx.$
16. $\int (x^2 + 3)\sin(x)dx.$

17. Найти площадь криволинейной трапеции, которая ограничена кривой $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$, $x = b$: а) $y=4x^3 + 2$, $x = 1$, $x = 2$, б) $y = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

18. Найти площадь фигуры, ограниченную:
а) кривыми $y = -x^2 + 4$ и $y = x^2 - 4$,
б) кривой $y = x^2$ и прямой $y = 4$,
в) кривой $y = -x^2 + 4$ и прямой $y = 4$.
Построить эти фигуры.

6. КОМБИНАТОРИКА

В повседневной жизни нередко возникают проблемы, которые имеют не один, а несколько вариантов решения. Чтобы сделать правильный выбор, очень важно не упустить ни один из них. Для этого надо уметь осуществлять перебор возможных вариантов или хотя бы подсчитывать их количество. Таково рода задачи называют *комбинаторными*.

Комбинаторика (комбинаторный анализ) – раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества и отношения на них. Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова «combina», что в переводе на русский язык означает – «сочетать», «соединять».

Знание комбинаторики необходимо представителям самых разных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, информатикам, лингвистам, культурологам и другим специалистам. Комбинаторные методы лежат в основе решения многих задач теории вероятностей и ее приложений.

Термин «комбинаторика» был введен в математический обиход известным немецким ученым Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1.07.1646 – 14.11.1716). В 1666 г. он опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве», в котором ввел специальные символы, термины для подмножеств и операций над ними, нашел все k–сочетания из n элементов и вывел свойства сочетаний.

Комбинаторика рассматривает задачи о перечислении или подсчете количества различных соединений (например, перестановок), образуемых элементами конечных множеств, на которые могут накладываться определенные ограничения, такие как различимость или неразличимость элементов, возможность повторения одинаковых элементов и т. п.

6.1. Схема решения комбинаторных задач

Задачу можно назвать *комбинаторной*, если ее решением является перебор элементов некоторого конечного множества. Особая примета комбинаторных задач – вопрос, который можно сформулировать таким образом, что он начинался бы словами:

Сколькими способами …?

Сколько вариантов …?

Для того чтобы решить задачу по комбинаторике, необходимо сначала понять ее смысл, то есть представить мысленно процесс или действие, описанное в задаче. Нужно четко определить тип соединений в задаче, а для этого надо, составив несколько различных комбинаций, проверить, повторяются ли элементы, меняется ли их состав, важен ли порядок элементов.

Если же комбинаторная задача содержит ряд ограничений, налагающихся на соединения, то нужно понять, как влияют или не влияют эти ограничения на соединения. В том случае, если трудно сразу определить какие-либо важные моменты задачи, то неплохо было бы попытаться разобраться в более легкой задаче, например в той, в которой не учитываются ограничения. Если ограничения есть в исходной задаче или же в задаче, в которой рассматривается меньшее количество элементов, тогда проще будет понять принцип образования выборок.

Когда комбинаторная задача состоит из различных комбинаций элементарных задач, то нужно просто разбить задачу на подзадачи.

Количество соединений, образованных несколькими манипуляциями над множеством, подсчитывается согласно правилам *сложения* и *умножения*.

Правило сложения. Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, то выбор «либо A, либо B» можно осуществить $(m+n)$ способами.

При использовании правила сложения надо следить, чтобы ни один из способов выбора объекта A не совпадал с каким-либо способом выбора объекта B. Если такие совпадения есть, правило сложения утрачивает силу, и мы получаем лишь ($m + n - k$) способов выбора, где k – число совпадений.

Пример. Сколько чисел в первой сотне, делящихся на два или на три?

Решение. Каждое второе число в натуральном ряде делится на 2, каждое третье – на 3. Поэтому в первой сотне есть 50 чисел, делящихся на 2, и 33 числа, делящихся на 3. Но среди первых и вторых имеются числа, делящиеся и на 2, и на 3, т. е. делящиеся на 6. Если 100 разделить на 6, то неполное частное будет равняться 16, т. е. 16 чисел в первой сотне делится на 6. Итак, количество чисел в первой сотне, делящихся на 2 или на 3, равно 50+33-16=67.

Правило умножения. Если объект A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор пары (A, B) в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами. При этом число способов выбора второго элемента не зависит от того, как именно выбран первый элемент.

Правило умножения справедливо для выбора любого конечного числа объектов. В общем случае его можно сформулировать так:

Если объект A_1 может быть выбран n_1 различными способами, A_2 – n_2 различными способами и т. д., A_k – n_k различными способами, то k объектов A_1, A_2,…, A_k в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Примеры:

1. В студенческой группе 25 человек. Сколькими способами в этой группе можно выбрать старосту и профорга.

Решение. Старостой может любой из 25 студентов. После выбора старосты на роль профорга могут претендовать 24 оставшихся студентов. Таким образом, всего есть 25·24=600 различных вариантов выбора.

2. В саквояжах часто применяют секретные замки, которые открываются, когда набран шифр. В замке имеется несколько дисков. Пусть на каждом диске имеется 12 букв, а секретное слово-шифр состоит из 4 букв. Вычислите, сколько существует вариантов для набора шифра.

Решение. Для набора первой буквы слова существует 12 способов и набор буквы на следующем диске не зависит от того, какая буква была набрана на предыдущем диске. Поэтому, применяя правило умножения, получаем 12·12·12·12= 20736 вариантов набора шифра.

Упражнения 6.1

1. Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4.

2. Подсчитайте количество пятизначных чисел, у которых все цифры нечетные.

3. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся без остатка на 5? Определите количество пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (например, 12521, 34043).

4. Сколько имеется четырехзначных чисел, которые без остатка делятся на 2?

Тест

Сколько в первой сотне натуральных чисел имеется чисел, которые без остатка делятся на: а) 2; б) 3; в) 5; г) 2 или 3; д) 3 или 5?

Ответ выберите из приведенного списка: а) 20; б) 50; в) 47; г) 67; д) 33.

6.2. Перестановки

Для формулировки и решения комбинаторных задач используют различные модели комбинаторных соединений. *Комбинаторные соединения* – это комбинации из каких-либо элементов. В комбинаторных соединениях может играть существенную роль или порядок элементов, или их состав, или то и другое. В зависимости от этого комбинаторные соединения имеют определенное название. Основными типами комбинаторных соединений являются: *перестановки*, *размещения* и *сочетания*.

Возьмем n различных элементов: a_1, a_2, a_3, …, a_n . Будем переставлять их всеми возможными способами, сохраняя их количество и меняя лишь порядок их расположения. Каждая из полученных таким образом комбинаций называется *перестановкой*. Общее количество перестановок из n элементов обозначается P_n. Это число равно произведению всех целых чисел от 1 до n:

$$P_n=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n=n!.$$

Символы $n!$ (читаются *n-факториал*) – сокращенная запись произведения: $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$.

Эта функция определяется для значения n, равного 0 и 1, следующим образом: $0! = 1$; $1! = 1$.

Пример 1. Найти число перестановок из трех элементов: a, b, c.

Решение. В соответствии с приведенной выше формулой P_n получим, что $P_3=1\cdot2\cdot3=6$. Действительно, мы имеем 6 перестановок: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Пример 2. Сколькими способами можно расставить на пятиместной полке пять различных книг?

Решение. На первое место можно поставить любую из пяти книг, на второе место – любую из четырех оставшихся книг, на третье – любую из трех оставшихся книг и т. д. Таким образом, всего получается $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ способов.

Перестановки с повторениями – комбинаторные соединения, в которых среди образующих элементов имеются одинаковые. В таких соединениях участвуют несколько типов объектов, причем имеется некоторое количество объектов каждого типа. Поэтому в выборках встречаются одинаковые элементы.

Рассмотрим перестановку

$$\underbrace{aa\ldots a}_{n_1};\underbrace{bb\ldots b}_{n_2};\ldots;\underbrace{zz\ldots z}_{n_k}.$$

Элементы 1-го типа можно переставлять $n_1!$ способами. Поскольку эти элементы одинаковые, получим ту же перестановку из n элементов. Так же ничего не изменяют $n_2!$ перестановок элементов 2-го типа, … , $n_k!$ перестановок k–го типа. Перестановки элементов 1-го типа, 2-го типа и т. д. можно выполнять независимо друг от друга. Поэтому одинаковые элементы любой перестановки из n элементов можно переставлять $n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_k!$ способами так, что она не изменяется. Таким образом, совокупность всех перестановок содержит $n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_k!$ одинаковых перестановок. Отсюда получаем, что количество различных перестановок с повторениями определяется следующей формулой:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Пример. Сколько перестановок можно образовать из букв слова «задача».

Решение. Если бы в слове все буквы были различными, то число всех перестановок равнялось бы 6!=720. Но в слове «задача» содержится три одинаковых буквы «а». Поэтому число всех перестановок из букв слова «задача» равно

$$\frac{6!}{3!} = 120.$$

Упражнения 6.2

1. Сколько в приведенном списке: *acb*, *bac*, *bca*, *cab* не хватает перестановок трех элементов. Дополните этот список недостающими перестановками.
2. Подсчитайте количество всех перестановок, которые можно образовать из букв слова «комбинаторика».
3. Во сколько раз больше можно образовать перестановок из букв слова «логика», чем из букв слова «алгебра»?
4. Из букв какого слова можно образовать больше перестановок: «математика» или «симметрия»?

Тест

Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы следующих слов: а) «математика»; б) «алгебра»; в) «логика»; г) «величина»; д) «ответ». Ответ выберите из приведенного списка значений: а) 720; б) 20160; в) 60; г) 360; д) 151200.

6.3. Размещения и сочетания

Будем составлять группы из m различных элементов, взятых из множества, состоящего из n элементов, располагая эти m взятых элементов в различном порядке. Полученные комбинации называются *размещениями* из n элементов по m.

Их общее количество обозначается A_n^m. Найдем, чему равняется A_n^m.

Первый элемент для размещения можно выбрать n различными способами. Для размещения второго элемента остается n-1 возможность и т. д. Последний m-й элемент размещают после извлечения (m–1)-го элемента, т. е. из [n–(m–1)] оставшихся элементов. Применяя правило умножения, получим, что число размещений из n элементов по m равно

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(m-1)].$$

Полученную формулу иногда записывают в следующем, более кратком виде

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Очевидно, что из этой формулы можно получить предыдущую формулу делением ее числителя и знаменателя на величину $(n\text{-}m)!$

Пример. Найти число размещений из четырех элементов a, b, c, d по два.

Решение. В соответствии с формулой получим:

$$A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Вот эти размещения: *ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc*.

Будем составлять группы из m различных элементов, взятых из множества, состоящего из n элементов, не принимая во внимание порядок расположения этих m элементов. Тогда мы получим *сочетания* из n элементов по m.

Их общее количество обозначается C_n^m.Вычислим это количество.

Из каждой неупорядоченной выборки, состоящей из различных элементов, можно получить $m!$ упорядоченных выборок. По правилу умножения число всех упорядоченных выборок из n по m равно

$$n(n\text{-}1)(n\text{-}2)\ldots(n\text{-}m+1)=C_n^m \cdot m!.$$

Таким образом,

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}.$$

Заметим, что можно составить только одно сочетание из n элементов по n, которое содержит все n элементов. Формула числа сочетаний дает это значение, если только принять, что

0!=1. Ранее мы отмечали, что эта формула есть определение 0!.

В соответствии с этим определением получим:

$$C_n^n = C_n^0 = 1.$$

Если в формуле для вычисления C_n^m числитель и знаменатель умножить на $(n-m)!$, то получим другую формулу

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}.$$

Из этой формулы ясно, что

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Общее число сочетаний можно вычислить, пользуясь и другим выражением:

$$C_n^m = A_n^m / P_m.$$

Пример. Найдите число сочетаний из пяти элементов: a, b, c, d, e по три.

Решение.

$$C_5^3 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!} = 10.$$

Эти сочетания: *abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.*

Сочетания с повторениями – комбинаторные соединения из n элементов по m, составленные из этих элементов без учета порядка с возможностью многократного повторения предметов. Найти количество сочетаний с повторениями можно по формуле

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

Покажем, что эта формула является верной. Каждой неупорядоченной выборке с возвращением из n элементов по m можно поставить в соответствие последовательность из n-1 нулей и m единиц, т. е. последовательность длиной n+m-1. Верно и обратное утверждение: каждая последовательность из n-1 нулей и m единиц однозначно определяет такую выборку. Между выборками и последовательностями имеется взаимно однозначное соответствие. Поэтому число неупорядоченных выборок без возвращения из n элементов по m равно числу таких последовательностей, что, в свою очередь, равно числу способов выбора m мест для единиц или, что то же самое, n-1 мест для нулей из общего числа $n+m$-1 мест. Это и требовалось доказать.

Пример. Подсчитайте количество костей в домино.

Решение. Каждую кость домино можно рассматривать как выборку, образованную из семи элементов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, содержащую два элемента. Эти выборки являются выборками с возвращением (среди костей домино есть дубли 0 : 0, 1 : 1 и т. д.) и неупорядоченные (кости 0 : 1 и 1 : 0 неразличимы). Поэтому для подсчета числа костей в домино можно применить формулу числа сочетаний с повторениями

$$\tilde{C}_7^2 = C_{7+2-1}^2 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Упражнения 6.3

1. Какое число больше: C_3^6 или C_4^7?

2. Вычислите значения чисел: A_6^3, C_6^3, $\tilde{C}_6^3$.

3. Расположите в порядке возрастания следующие числа: A_6^2, C_6^2, $\tilde{C}_6^2$.

4. Во сколько раз число размещений A_n^m больше, чем число сочетаний C_n^m?

5. Есть 10 разноцветных карандашей. Сколько различных наборов по 6 карандашей из них можно получить?

Тест

1. Чему равны числа размещений: а) A_5^5; б) A_6^3; в) A_4^2; г) A_3^2; д) A_5^3? Ответы выберите из приведенного списка значений: а) 1; б) 12; в) 60; г) 6; д) 120.

2. В списке: а) 10; б) 6; в) 35; г) 252; д) 56 – найдите значения следующих чисел сочетаний с повторениями: а) $\tilde{C}_5^5$; б) $\tilde{C}_6^3$; в) $\tilde{C}_4^2$; г) $\tilde{C}_3^2$; д) $\tilde{C}_5^3$.

6.4. Бином Ньютона

Бином Ньютона – это формула, представляющая выражение $(a+b)^n$ при положительном целом n в виде многочлена:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Числа $C_n^1, C_n^2, C_n^3, ..., C_n^{n-1}$ называются биномиальными коэффициентами. Заметим, что сумма показателей степеней для a и b постоянна и равна n.

Пример. Запишите формулу суммы кубов двух чисел.

Решение. Запишем формулу бинома Ньютона для n, равного 3, и вычислим биномиальные коэффициенты:

$$(a+b)^3 = a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + b^3 = a^3 + \frac{3!}{1! \cdot 2!} a^2 b + \frac{3!}{2! \cdot 1!} ab^2 + b^3 =$$

$$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 .$$

Биномиальные коэффициенты можно вычислить, применяя только сложение, если пользоваться следующей схемой. В верхней строке пишем две единицы. Все последующие строки начинаются и заканчиваются единицей. Промежуточные числа в этих строках получаются суммированием соседних чисел из предыдущей строки. Эта схема называется *треугольником Паскаля*.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
....

Треугольник Паскаля

Первая строка в этой таблице содержит биномиальные коэффициенты для $n = 1$; вторая – для $n = 2$; третья – для $n = 3$ и т. д. Поэтому, если необходимо, например, разложить выражение $(a+b)^7$, мы можем получить результат моментально, используя треугольник Паскаля:

$$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7 .$$

Биноминальные коэффициенты обладают следующими свойствами:

1. Сумма коэффициентов разложения $(a+b)^n$ равна 2^n .

Для доказательства достаточно положить $a=b=1$. Тогда в правой части разложения бинома Ньютона мы будем иметь сумму биномиальных коэффициентов, а слева: $(1+1)^n=2^n$.

2. Коэффициенты членов, равноудаленных от концов разложения, равны. Это свойство следует из соотношения:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

3. Сумма коэффициентов четных членов разложения равна сумме коэффициентов нечетных членов разложения; каждая из них равна 2^{n-1}.

Для доказательства воспользуемся биномом: $(1–1)^n = 0^n = 0$. Здесь четные члены имеют знак «+», а нечетные – «–». Так как в результате разложения получается 0, то, следовательно, суммы их биномиальных коэффициентов равны между собой, поэтому каждая из них равна: 2^n: $2=2^{n-1}$, что и требовалось доказать.

Формулу бинома Ньютона можно использовать для приближенного вычисления степеней. Положив в формуле бинома Ньютона $a=1$, $b=x$, получим

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n.$$

Если значение x мало, то значения x^2, x^3, …, x^n тем более малы. Поэтому если в последнем равенстве отбросить все слагаемые, начиная с третьего, и учесть, что $C_n^1 = n$, то получим приближенную формулу

$$(1+x)^n \approx 1+nx.$$

При малых значениях x она дает удовлетворительный результат.

Упражнения 6.4

1. Представьте выражение $(2+3x)^6$ в виде многочлена, используя формулу бинома Ньютона.

2. Найдите наибольший биномиальный коэффициент разложения $(a+b)^n$, если сумма всех биномиальных коэффициентов равна 128.

3. Найдите без использования вычислительных средств приближенное значение выражений: а) $(1{,}01)^9$; б) $(0{,}998)^5$.

4. Запишите разложение $(a+b+c)^3$.

5. Найдите показатель степени n в выражении $(3a–2)^n$, если известно, что коэффициент при a^2 в разложении этой степени равен 216.

Тест

1. Биномиальный коэффициент третьего от начала члена разложения $(a+b)^n$ равен 28. Определите:

а) показатель степени n;

б) сумму биномиальных коэффициентов этого разложения;

в) биномиальный коэффициент третьего от конца члена этого разложения;

г) количество биномиальных коэффициентов в этом разложении;

д) биномиальный коэффициент четвертого от начала члена этого разложения.

Ответ выберите из приведенного списка значений: а) 56; б) 9; в) 256; г) 8; д) 28.

2. Сумма биномиальных коэффициентов четных членов разложения равна 256. Определите:

а) показатель степени n;

б) сумму биномиальных коэффициентов этого разложения;

в) биномиальный коэффициент пятого члена этого разложения;

г) количество биномиальных коэффициентов в этом разложении;

д) сумму биномиальных коэффициентов нечетных членов разложения.

Ответ выберите из приведенного списка значений: а) 126; б) 10; в) 256; г) 512; д) 9.

Задачи

1. Сколькими способами можно расставить два коня, два слона, две ладьи, ферзя и короля на одной линии шахматной доски?

2. В подъезде дома установили кодовый замок, который открывается набором четырех цифр. Жилец дома запомнил, что в кодовом наборе имеется число 17. Какое наибольшее количество кодов нужно набрать, чтобы открыть дверь?

3. Сколькими способами можно переставить буквы слова «задача», чтобы три буквы «а» шли подряд?

4. В пятом семестре студенты специализации «информационные системы в культуре» изучают 12 дисциплин. При

составлении расписания занятий в один день ставят три различных дисциплины. Сколькими способами можно составить расписание занятий на один день?

5. Сколькими способами семь карандашей можно распределить между тремя детьми, если карандаши: а) разные; б) одинаковые; в) разные и каждому ребенку достался хотя бы один карандаш; в) одинаковые и каждому ребенку досталось, по крайней мере, два карандаша?

6. Сколько существует пятизначных телефонных номеров, состоящих их различных цифр, у которых первая цифра не может быть нулем?

7. Из ящика, содержащего 18 пригодных и пять бракованных изделий, наугад вынимают три изделия. Сколько существует событий, означающих, что: а) все изделия пригодны; б) пригодны лишь два изделия; в) пригодно лишь одно изделие; г) все изделия бракованы?

8. Сколькими способами 12 экземпляров одной книги можно разделить между: а) тремя призерами олимпиады; б) тремя призерами олимпиады так, чтобы каждому досталась хотя бы одна книга; в) тремя призерами олимпиады так, чтобы каждому досталось, по крайней мере, по две книги?

9. В студенческой группе 22 человека. Сколькими способами можно выбрать в ней старосту, заместителя старосты, профорга и лидера БРСМ?

10. Раскройте скобки в выражении $(a+2b)^3$.

7. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

7.1. Испытания и события

Предметом теории вероятностей является изучение законов, управляющих случайными событиями (явлениями). К основным понятиям теории вероятностей относятся испытание и событие.

Под *испытанием* (*опытом*) понимают реализацию данного комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое-либо *событие*.

Примеры:

1. Брошена монета – испытание. Появление герба или цифры – события.
2. Произведен выстрел по мишени – испытание. Попадание или промах – события.
3. В коробке имеются цветные карандаши. Из коробки наудачу берут один карандаш. Извлечение карандаша из коробки – испытание. Появление карандаша определенного цвета – событие.

Случайным событием называется событие, связанное с данным испытанием, которое при осуществлении этого испытания может произойти, а может и не произойти. Прилагательное «случайное» для краткости часто опускают и говорят просто «событие».

Примеры:

1. Брошена игральная кость (кубик, на гранях которого отмечено от одного до шести очков). Выпадение четырех очков – случайное событие.
2. В коробке имеются белые и черные шары. Из коробки наугад берут два шара. Оба шара белые – случайное событие.

Достоверным событием называется событие, которое в результате данного испытания непременно произойдет.

Пример. Брошена игральная кость. Выпадение не более шести очков – достоверное событие.

Невозможным событием называется событие, которое заведомо не произойдет в результате данного испытания.

Примеры:

1. Брошена игральная кость. Выпадение десяти очков – невозможное событие.

2. Камень брошен вверх. Камень остается висеть в воздухе – невозможное событие.

Случайные события обозначаются большими буквами латинского алфавита $A, B, C, \dots$. Например, событие A – попадание в мишени при стрельбе, событие B – появление герба при бросании монеты. Достоверное событие будем обозначать буквой U, невозможное – V.

Отметим, что всякое случайное событие является следствием очень многих причин. Например, выпадение герба или цифры при бросании монеты зависит от силы, с которой брошена монета, ее формы, сплава и многих других причин. Попадание или промах при стрельбе зависит от расстояния до мишени, веса пули (снаряда), от направления и силы ветра и других случайных причин. В связи с этим невозможно заранее предсказать, произойдет единичное событие или нет. Иначе обстоит дело при изучении многократно повторяющихся событий. Оказывается, что однородные случайные события при многократном повторении подчиняются определенным закономерностям. Изучением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Пусть произведено испытание, в результате которого возможны события $A_1, A_2, \dots, A_n$. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *несовместными*, если осуществление одного из них исключает осуществление других.

Примеры:

1. В ящике имеются стандартные и нестандартные детали. Наудачу берут одну деталь. События A_1 – «появилась стандартная деталь» и A_2 – «появилась нестандартная деталь» являются несовместными событиями.

2. Брошена игральная кость. Событие A_1 – «появление двух очков» и событие A_2 – «появление четного числа очков» совместны, так как появление одного из них не исключает появление другого.

События A_1, A_2, …, A_n называются *равновозможными*, если условия испытания обеспечивают одинаковую возможность осуществления каждого из них.

Примеры:

1. Появление того или иного числа очков при бросании игральной кости есть события равновозможные, так как игральная кость изготавливается из однородного материала и имеет строго симметричную форму.

2. Появление герба и появление цифры при бросании симметрической монеты есть события равновозможные.

События A_1, A_2, …, A_n образуют *полную группу событий*, если в результате данного испытания непременно произойдет хотя бы одно из них.

Пример. В коробке имеются три белых шара, перенумерованных цифрами 1, 2, 3, и пять черных шаров, перенумерованных цифрами 1, 2, … , 5. Из коробки наугад берут один шар. События: A_1 – «появление шара с цифрой 1», A_2 – «появление шара с цифрой 2», … , A_5 – «появление шара с цифрой 5» – образуют полную группу.

Важную роль играет *полная группа несовместных событий*, т. е. такая группа событий, что в результате данного испытания непременно произойдет одно и притом только одно событие данной группы.

Пример. При бросании игральной кости события: A_1 – «появление одного очка», A_2 – «появление двух очков», … , A_6 – «появление шести очков» – образуют полную группу несовместных событий.

Два случайных события называются *противоположными*, если одно из них происходит в том и только том случае, когда не происходит другое.

Событие, противоположное событию A, обозначают через $\bar{A}$ (читают «не A»).

Примеры:

1. Попадание и промах при выстреле по мишени – противоположные события. Если A – попадание, то $\bar{A}$– промах.

2. Появление четного числа очков при бросании игральной кости – событие, противоположное появлению нечетного числа очков.

Очевидно, что противоположные события образуют полную группу событий.

Отметим, что любое случайное событие может быть представлено в виде некоторого множества.

Пример. При бросании игральной кости непременно произойдет одно из событий A_1, A_2, …, A_6 . Каждое из этих событий назовем *элементарным событием*. Все элементарные события A_i (i=1, 2, …, 6) *образуют множество элементарных событий* A={A_1, A_2, …, A_6}.

Очевидно, что: 1) событие B – «появление четного числа очков» может быть представлено в виде множества B = {A_2, A_4, A_6}; 2) событие C – «появление числа очков не большего трех», может быть представлено множеством C = {A_1, A_2, A_3}; 3) событие D – «появление числа очков, которое делится на 3», может быть представлено множеством D = {A_3, A_6} и т. д.

Нетрудно заметить, что множества B, C и D являются подмножествами множества элементарных событий A. Таким образом, любое случайное событие может быть представлено подмножеством множества всех элементарных событий данного испытания.

Упражнения 7.1

1. Найдите среди следующих случайных событий достоверные и невозможные события:

A_1 – «появление 10 очков при бросании игральной кости»;

A_2 – «появление 10 очков при бросании трех игральных костей»;

A_3 – «появление 20 очков при бросании трех игральных костей»;

A_4 – «наугад выбранное двузначное число не больше 100»;

A_5 – «появление двух гербов при бросании двух монет».

2. Являются ли несовместными события A_1 и A_2:

а) испытание – бросание монеты; события: A_1 – «появление герба», A_2 – «появление цифры»;

б) испытание – бросание игральной кости; события: A_1 – «появление трех очков», A_2 – «появление нечетного числа очков»;

в) испытание – бросание двух монет; события: A_1 – «появление герба на одной монете», A_2 – «появление герба на другой монете»?

3. Являются ли равновозможными приведенные ниже события A_1 и A_2:

а) испытание – бросание игральной кости; события: A_1 – «появление двух очков», A_2 – «появление пяти очков»;

б) испытание – бросание игральной кости; события: A_1 – «появление трех очков», A_2 – «появление нечетного числа очков»;

в) испытание – два выстрела по мишени; события: A_1 – «промах при первом выстреле», A_2 – «промах при втором выстреле»?

4. Образуют ли полную группу события:

а) испытание – бросание монеты; события: A_1 – «появление герба», A_2 – «появление цифры»;

б) испытание – два выстрела по мишени; события: A_1 – «ни одного попадания», A_2 – «одно попадание», A_3 – «два попадания»?

Тест

Сколько элементарных событий получается при бросании: а) игральной кости; б) монеты; в) двух монет; г) двух игральных костей; д) монеты и игральной кости?

Ответ выберите из списка: а) 2; б) 4; в) 6; г) 12; д) 36.

7.2. Операции над событиями

Рассмотрим события: A – «появление трех очков при бросании игральной кости», B – «появление нечетного числа очков при бросании игральной кости».

Очевидно, что если произошло событие A, то непременно произошло и событие B. В этом случае говорят «A влечет за собой B» (или «B является следствием A») и записывают $A \subset B$ (или $B \supset A$).

Если события A и B таковы, что $A \subset B$ и $B \supset A$, то они называются *равными* (*равносильными*), при этом пишут $A = B$.

Пример. Брошена симметричная монета. Событие A – «появление герба», событие B – «непоявление цифры». Очевидно, что $A \subset B$ и $B \subset A$ и, следовательно, $A = B$.

Отметим, что событие A может быть частью события B только в том случае, когда элементарные события, представляющие событие A, принадлежат подмножеству элементарных событий, представляющих событие B.

Пример. В коробке имеются пять белых шаров, перенумерованных от 1 до 5, и семь черных шаров, перенумерованных от 6 до 12. Очевидно, что событие A – «появление шара с номером 8» влечет за собой событие B – «появление черного шара». Поэтому $A \subset B$.

Так как события могут быть представлены в виде подмножеств множества элементарных событий, то действия над событиями выполняются аналогично действиям над множествами.

Сложение

Определение. Суммой, или объединением, двух событий A и B называется событие C, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий A или B (безразлично, какого именно, или обоих, если это возможно).

Символически записывают так: $C=A+B$ или $C=A \cup B$.

Сумма событий интерпретируется как объединение (сумма) множеств (подмножеств множества элементарных событий) – см. рис. 1.

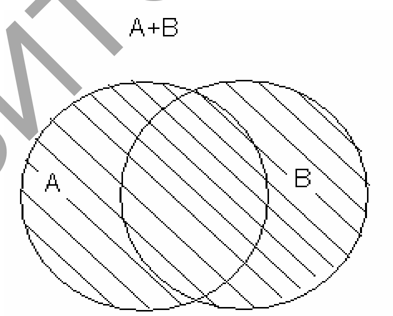


Рис. 1. Сумма событий A и B

Суммой, или объединением, нескольких событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие C, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Символическая запись:

$$C=\sum_{i=1}^{n} A_i \text{ или } C=\bigcup_{i=1}^{n} A_i .$$

Пример. Найти сумму событий: A – «появление одного очка при бросании игральной кости» и B – «появление двух очков при бросании игральной кости».

Суммой $A+B$ является событие C – «появление не больше двух очков при бросании игральной кости», поэтому $A+B=C$.

Если события A и B – несовместные, то сумма $A+B$ является событием, состоящим в осуществлении одного из этих событий, безразлично какого (их совместное осуществление невозможно).

Непосредственно из определения суммы событий вытекают следующие свойства сложения:

1) $A+B=B+A$ (коммутативность);

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативность);

3) $A+\overline{A}=U$.

Умножение

Определение. Произведением, или пересечением, двух событий A и B называется событие C, состоящее в одновременном осуществлении A и B.

Символически произведение записывают так:

$$C=AB \text{ или } C=A\cap B.$$

Теоретико-множественная интерпретация произведения событий дана на рис. 2.

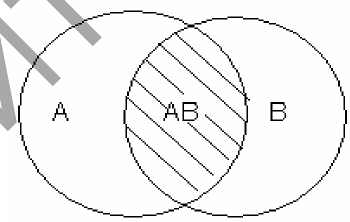


Рис. 2. Произведение событий A и B

Произведением, или пересечением, нескольких событий A_1, A_2, …, A_n называется событие C, состоящее в одновременном осуществлении всех событий. Символически представляется следующим образом:

$$C=\prod_{i=1}^{n} A_i \text{ или } C=\bigcap_{i=1}^{n} A_i .$$

Пример. Найти произведение событий A – «студенту попался экзаменационный билет с четным номером» и B – «студенту попался экзаменационный билет с номером, кратным пяти».

Решение. Произведением AB является событие C – «студенту попался экзаменационный билет с номером, кратным десяти», поэтому $AB=C$.

Если события A и B – несовместные, то $AB=V$, т. е. произведение AB – невозможное событие.

Можно показать, что для умножения событий имеют место свойства:

1) $AB=BA$ (коммутативность);

2) $A(BC)=(AB)C$ (ассоциативность);

3) $A(B+C)=AB+AC$ (дистрибутивность);

4) $A\overline{A}=V$.

Упражнения 7.2

1. Найдите сумму событий:

а) испытание – два выстрела по мишени; события: A – «попадание первым выстрелом», B – «попадание вторым выстрелом»;

б) испытание – бросание игральной кости; события: A – «появление одного очка», B – «появление двух очков», С – «появление трех очков»;

в) испытание – приобретение лотерейных билетов; события: А – «выигрыш 10 рублей», B – «выигрыш 20 рублей», C – «выигрыш 25 рублей».

2. Найдите произведение событий:

а) испытание – два выстрела по мишени; события: A –«попадание первым выстрелом», B – «попадание вторым выстрелом»;

б) испытание – бросание игральной кости; события: A – «непоявление трех очков», B – «непоявление пяти очков»; C – «появление нечетного числа очков».

Тест

1. При бросании игральной кости обозначим событие «появление двух очков» как A, «появление одного очка» – B и «появление трех очков» – C. Найдите событие: а) $A+B+C$; б) ABC; в) $AB+C$; г) $A+BC$; д) $A(B+C)+B$.

Ответ выберите из списка: а) невозможное событие; б) «появление одного очка»; в) «появление трех очков»; г) «появление двух очков»; д) «появление не более трех очков».

2. Пусть A, B и C – случайные события, выраженные подмножествами одного и того же множества элементарных событий. Используя операции сложения и умножения, запишите следующие события: а) произошло только событие A; б) произошло одно и только одно из данных событий; в) произошло два и только два из данных событий; г) произошли все три события; д) произошло хотя бы одно из данных событий.

Ответ выберите из приведенного списка: а) $A+B+C$; б) ABC; в) $A\overline{B}\,\overline{C}$; г) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$; д) $AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C$.

7.3. Вероятность события

Известно, что случайное событие в результате испытания может произойти, а может и не произойти. Однако объективная возможность различных событий в одном и том же испытании может, вообще говоря, быть различной.

Рассмотрим пример. В урне 12 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 3 из них белые и 9 черные. Из урны наудачу вынимают один шар. Очевидно, что возможность появления черного шара «больше», чем возможность появления белого шара. В этом случае говорят: «вероятность появления черного шара больше вероятности появления белого шара». Под *вероятностью события* понимают численную меру объективной возможности появления этого события.

Поставим своей задачей научиться находить эту численную меру объективной возможности события, т. е. находить вероятность события, причем ограничимся лишь вычислением вероятностей в классической модели.

Классическое определение вероятности

Под *классической моделью* понимают такое множество элементарных событий, которое образует полную группу несовместных событий и все элементарные события равновозможны.

Например, при бросании игральной кости множество элементарных событий: A_1 – «появление одного очка», A_2 – «появление двух очков», … , A_6 – «появление шести очков» – образуют классическую модель. Вероятность каждого из этих элементарных событий A_i (i = 1, 2, …, 6) считаем равной 1/6.

Рассмотрим теперь события: A – «появление четного числа очков», B – «появление не больше двух очков». Нетрудно заметить, что событие A произойдет, если произойдет по крайней мере одно из событий A_2, A_4, A_6. В этом случае говорят, что событию A благоприятствуют события A_2, A_4, A_6. Очевидно, что событию B благоприятствуют события A_1 и A_2.

То элементарное событие, при котором интересующее нас событие наступит, называется *благоприятствующим* этому событию.

При бросании игральной кости имеем 6 элементарных событий, из них 3 благоприятствуют событию A. Вероятность события A считаем равной 3/6=1/2. Аналогично, вероятность события B равна 2/6=1/3.

Кратко это записывается так:

$$P(A)=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{1}{3}.$$

Определение. *Вероятностью* $P(A)$ события A называется отношение числа m элементарных событий, благоприятствующих этому событию, к общему числу n равновозможных событий:

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1}$$

Это определение носит название *классического определения вероятности*.

Из (1) следует, что

$$P(U)=1 \text{ и } P(V)=0,$$

т. е. вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного события равна нулю. Если $A\neq U$ и $A\neq V$, то $0<P(A)<1$.

Итак, вероятность любого события A удовлетворяет неравенствам

$$0\leq P(A)\leq 1.$$

Рассмотрим ряд примеров непосредственного вычисления вероятностей.

Пример 1. В коробке 3 белых и 9 черных шаров. Из коробки наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется черным (событие A)?

Решение. Имеем $m = 9$, $n = 12$, и поэтому

$$P(A) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Пример 2. В урне 4 белых и 7 черных шаров. Из урны одновременно вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые (событие A)?

Решение. Здесь число элементарных событий

$$n = C_{11}^{2} = \frac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 55.$$

Число случаев, благоприятствующих событию А:

$$m = C_{4}^{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Следовательно,

$$P(A) = \frac{6}{55}.$$

Пример 3. В коробке a белых и b черных шаров. Из коробки наугад вынимают k шаров. Найти вероятность того, что среди них будет l белых, а, следовательно, k-l черных ($l \le a$, $k - l \le b$).

Решение. Число элементарных событий $n = C_{a+b}^{k}$. Подсчитаем число элементарных событий, благоприятствующих интересующему нас событию A – среди k взятых шаров будет l белых и k-l черных. Очевидно, что число способов, которыми можно выбрать l белых шаров из a, равно C_{a}^{l}, а число способов, которыми можно к ним «довыбрать» k-l черных шаров, равно C_{b}^{k-l}. Каждая комбинация белых шаров может сочетаться с каждой комбинацией черных, поэтому $m = C_{a}^{l} \cdot C_{b}^{k-l}$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{C_{a}^{l} C_{b}^{k-l}}{C_{a+b}^{k}}. \quad (2)$$

Пример 4. В партии из 12 деталей имеется 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наугад деталей 4 стандартных.

Решение. Нетрудно заметить сходство между этой и предыдущей задачами. Здесь в качестве «коробки» фигурирует партия деталей, среди которых 7 стандартных («белые шары») и 5 нестандартных («черные шары»), а роль вынимаемых шаров играет контрольная партия из шести деталей. Поэтому искомую вероятность находим по формуле (2) для случая $a=7$, $b=5$, $k=6$, $l=4$:

$$P(A)=\frac{C_7^4\cdot C_5^2}{C_{12}^6}=\frac{25}{66}.$$

Пример 5. Десять различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что три определенные книги окажутся поставленными рядом.

Решение. Представим себе, что три определенные книги связаны вместе. Тогда число возможных способов расположения связки на полке равно числу перестановок из 8 элементов (связка плюс остальные 7 книг), т. е. $P_8 = 8!$. Внутри связки 3 книги можно переставлять $P_3 = 3!$ раза. При этом каждая комбинация внутри связки может сочетаться с каждой из P_8 комбинаций. Поэтому число m благоприятствующих случаев равно P_8P_3, т. е. $m = P_8P_3$. Число n возможных случаев, очевидно, равно $P_{10} = 10!$.

Таким образом, искомая вероятность

$$p=\frac{P_8\cdot P_3}{P_{10}}=\frac{8!\cdot 3!}{10!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=\frac{1}{15}.$$

Аксиоматическое определение вероятности

Пусть задано пространство элементарных событий E и каждому событию $A\subset E$ поставлено в соответствие единственное число $P(A)$ такое, что:

1) $0\le P(A)\le 1$,

2) для каждой пары несовместных событий A, $B\subset E$ имеет место равенство: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$,

3) $P(E)=1$.

Тогда говорят, что на событиях в множестве E задана вероятность, а число $P(A)$ называется *вероятностью события* A.

Упражнения 7.3

1. В коробке 100 шаров, помеченных номерами 1, 2, …, 100. Из коробки наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара содержит цифру 5?

2. В коробке 9 белых и 6 черных шаров. Из коробки вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

3. В партии из 8 деталей имеется 6 стандартных. Найдите вероятность того, что среди взятых наугад деталей ровно три стандартных.

4. Восемь различных книг расставляются наугад на одной полке. Найдите вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

5. В книжном магазине на полке 10 различных книг, причем 5 книг стоят по 4 рубля каждая, 3 книги – по одному рублю и две книги – по 3 рубля. Найдите вероятность того, что взятые наугад две книги стоят 5 рублей.

6. Оля и Коля договорились встретить Новый год в компании десяти человек. Они оба хотели сидеть за праздничным столом рядом. Найдите вероятность исполнения их желания, если среди друзей принято места распределять по жеребьевке.

Тест

Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна 8; б) произведение выпавших очков равно 8; в) сумма выпавших очков больше, чем их произведение; г) сумма выпавших очков меньше, чем их произведение; д) сумма выпавших очков равна их произведению.

Ответ выберите из списка: а) 11/36; б) 1/36; в) 5/36; г) 1/18; д) 2/3.

7.4. Операции над вероятностями

Сложение

Теорема. Вероятность суммы двух несовместных событий A и В равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть n – общее число равновозможных несовместных элементарных событий испытания, в результате которого может произойти одно из событий A или B, m_A –

число элементарных событий, благоприятствующих событию A, m_B – число элементарных событий, благоприятствующих событию B. Тогда, так как события A и B несовместны, имеем:

$$P(A+B)=\frac{m_A+m_B}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}=P(A)+P(B),$$

что и требовалось доказать.

Следствия:

1. Вероятность суммы нескольких событий A_1, A_2, … , A_n равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \qquad (2)$$

Это следствие получается из теоремы 1 применением метода математической индукции.

2. Если события A_1, A_2, …, A_n несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1. \qquad (3)$$

3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.

$$P(A)+P(\bar{A})=1. \qquad (4)$$

Это непосредственно следует из формулы (3), так как противоположные события образуют полную группу.

Примеры:

1. Военный летчик получил задание уничтожить два рядом расположенных склада боеприпасов противника. На борту самолета осталась лишь одна бомба. Вероятность попадания в первый склад равна 0,225, во второй – 0,325. В результате детонации любое попадание взрывает оба склада. Какова вероятность того, что склады будут уничтожены?

Решение. События A – «попадание в первый склад» и B – «попадание во второй склад» несовместны, поэтому вероятность попадания хотя бы в один из складов

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}225+0{,}325=0{,}55.$$

2. На заочное отделение университета поступают контрольные работы по математике из городов A, B и C. Вероятность поступления контрольной работы из города A равна 0,6, из города B – 0,1. Найти вероятность того, что очередная контрольная работа поступит из города C.

Решение. События «контрольная работа поступила из города A», «контрольная работа поступила из города B» и «контрольная работа поступила из города *С*» образуют полную группу, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$0{,}6+0{,}1+p=1 \Leftrightarrow p=0{,}3.$$

3. Вероятность того, что день будет ясным, $p = 0{,}85$. Найти вероятность q того, что день будет облачным.

Решение. События «день ясный» и «день облачный» противоположные, поэтому

$$p+q=1 \Leftrightarrow q=1–p=1–0{,}85=0{,}15.$$

Теорема. Если события *А* и *В* совместны, то вероятность их суммы выражается формулой

$$\text{P(A+B)=P(A)+P(B)–P(AB)}, \qquad (5)$$

т. е. вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения (совместного осуществления).

Доказательство. Пусть m – число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию *А*, k – число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию *В*. Допустим, что среди $m+k$ элементарных событий содержится l таких, которые благоприятствуют как событию *А*, так и событию *В*. Тогда, если n – общее число равновозможных элементарных событий,

$$P(A)=\frac{m}{n}, \qquad P(B)=\frac{k}{n}, \qquad P(AB)=\frac{l}{n}.$$

Таким образом, событие $A+B$ состоит в том, что произошло или событие *А*, или событие *В*, или и то и другое, то ему благоприятствуют $m+k-l$ элементарных событий. Поэтому

$$P(A+B)=\frac{m+k-l}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{l}{n},$$

или

$$P(A+B)=P(A)+P(B)–P(AB),$$

что и требовалось доказать.

Пример. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей хотя бы один раз выпадет 6 очков.

Решение. Обозначим события:

А – «выпадение шести очков при бросании первой игральной кости»;

В – «выпадение шести очков при бросании второй игральной кости».

Так как события *А* и *В* совместны, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)–P(AB).$$

Но $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{6}$ и $P(AB)=\frac{1}{36}$, поэтому

$$P(A+B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}.$$

Умножение

Определение. Два события A и B называются *независимыми*, если вероятность одного из них не зависит от того, произошло или не произошло другое.

Пример. Игральная кость брошена два раза. Вероятность появления трех очков в первом испытании (событие A) не зависит от появления или непоявления трех очков во втором испытании (событие B). Аналогично, вероятность появления трех очков во втором испытании не зависит от результата первого испытания. Следовательно, события A и B – независимые.

Теорема. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий, т. е.

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть n_1 – число равновозможных элементарных событий испытания, в результате которого событие A может произойти или не произойти; m_1 – число элементарных событий, благоприятствующих событию A ($m_1 \leq n_1$), n_2 – число равновозможных элементарных событий испытания, в результате которого может произойти событие B, m_2 – число элементарных событий, благоприятствующих событию B ($m_2 \leq n_2$).

Нетрудно заметить, что общее число элементарных событий испытания, в результате которого может произойти (или не произойти) событие AB, равно $n_1 \times n_2$. Так как события A и B независимы, то число элементарных событий, благоприятствующих событию AB, равно $m_1 \times m_2$. Поэтому

$$P(AB)=\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=P(A)\cdot P(B),$$

что и требовалось доказать.

Если имеем n попарно независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то можно доказать, что

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n). \qquad (7)$$

Пример. Два стрелка стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,9, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что оба стрелка попадут в цель.

Решение. Обозначим события: A – «попадание в цель первым стрелком», B – «попадание в цель вторым стрелком». Так как события A и B независимы, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72.$$

Определение. Два события A и B называются *зависимыми*, если вероятность одного из них зависит от того, произошло или не произошло другое.

Пример. В ящике имеется 90 стандартных деталей и 10 нестандартных. Из ящика наудачу берут одну за другой две детали. Вероятность появления стандартной детали при первом испытании (событие A) равна

$$P(A)=\frac{90}{100}=0{,}9.$$

Вероятность появления стандартной детали при втором испытании (событие B) зависит от результата первого испытания: если в первом испытании событие A произошло, то

$$P(B)=\frac{90}{99}=\frac{10}{11}.$$

Следовательно, события A и B – зависимые.

Определение. Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло, называется *условной вероятностью события A при условии B* и обозначается $P(A \mid B)$.

Пример. В коробке a белых и b черных шаров. Из коробки наудачу последовательно вынимают два шара. Найти вероятность того, что второй шар окажется черным при условии, что первый шар был черным.

Решение. Обозначим события: A – «первый шар черный»; B – «второй шар черный».

Если произошло событие A, то в урне осталось всего a=b–1 черных. Поэтому условная вероятность события B при условии, что произошло событие A, есть:

$$P(B \mid A)=\frac{b-1}{a+b-1}.$$

Для зависимых событий справедлива следующая теорема.

Теорема. Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) \Leftrightarrow P(AB) = P(B) \cdot P(A \mid B). \qquad (8)$$

В случае n произвольных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ справедлива формула

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 A_2 \ldots A_{n-1}), \qquad (9)$$

где $P(A_n \mid A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$ – вероятность события A_n, вычисленная при условии, что произошли события $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$.

Примеры:

1. В цехе изготавливаются детали на трех станках. Вероятность изготовления на первом станке равна 0,6. Вероятность появления годной детали на первом станке равна 0,8. Найти вероятность того, что годная деталь изготовлена на первом станке.

Решение. Обозначим события: A – «деталь изготовлена на первом станке», B – «деталь годная».

Имеем: $P(A)$=0,6, $P(B|A)$=0,8. По формуле (8) находим:

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B|A)=0{,}6 \cdot 0{,}8=0{,}48.$$

2. В ящике находится 7 деталей первого сорта, 5 – второго сорта и 3 – третьего. Из ящика последовательно вынимают три детали. Найти вероятность того, что первая наугад вынутая деталь окажется первого сорта (событие A_1), вторая деталь – второго сорта (событие A_2) и третья деталь – третьего сорта (событие A_3).

Решение. Очевидно, что

$$P(A_1) = \frac{7}{15}, \; P(A_2 \mid A_1) = \frac{5}{14} \text{ и } P(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{3}{13}.$$

По формуле (8) находим

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{1}{26}.$$

Упражнения 7.4

1. Лаборатория получает изделия от заводов A, B и C. Вероятность поступления изделий от завода A равна 0,35, от завода B – 0,4. Найти вероятность того, что очередная партия изделий поступит от завода C.

2. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найти вероятность *p* того, что в цель попадет хотя бы один стрелок.

3. Инженер центра информационных состояний отвечает за исправное состояние компьютеров в трех лабораториях вычислительной техники кафедры информационных технологий в культуре. Вероятность того, что в течение дня потребует внимания 1-я лаборатория, равна 0,5; 2-я лаборатория – 0,6; 3-я лаборатория – 0,8. Найдите вероятности следующих событий: а) «ни одна лаборатория в течение дня не потребует внимания инженера»; б) «1-я лаборатория потребует внимания инженера, а 2-я и 3-я нет»; в) «1-я и 2-я лаборатория потребует внимания инженера, а 3-я нет»; г) «хотя бы одна из лабораторий потребует внимания инженера в течение дня»; д) «не более одной лаборатории потребуется внимание инженера».

4. На кафедру информационных технологий в культуре поступают контрольные работы по дисциплине «Основы высшей математики» от студентов 108, 111 и 112 группы факультета заочного обучения. Вероятность поступления контрольных работ от 108 группы равна 0,42, от 111 группы – 0,3. Найдите вероятность поступления контрольных работ от 112 группы.

Тест

Найдите вероятность выпадения: а) 3 гербов при подкидывании 3 монет; б) 4 цифр при подкидывании 4 монет; в) 2 очков при бросании игральной кости; г) 2 или 12 очков при бросании 2 игральных костей; д) 2 или 3 очков при бросании 2 игральных костей.

Ответ выберите из приведенного списка:

а) $\frac{1}{18}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{1}{16}$; д) $\frac{1}{36}$.

7.5. Формулы вероятностей

Формула полной вероятности

Операции над вероятностями представляют собой правила, служащие для вычисления вероятностей случайных событий через вероятности элементарных событий. При решении многих задач оказывается полезным одно следствие из этих правил, известное под названием *формулы полной вероятности*. Выведем эту формулу.

Пусть событие A может произойти только с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу несовместных равновозможных событий. Тогда вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + \mathbf{K} + P(H_n) \cdot P(A | H_n),$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A | H_i). \qquad (1)$$

В самом деле, так как событие A может произойти только с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, то

$$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n.$$

Из несовместности событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ следует несовместность событий $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$. Поэтому

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n).$$

Применив к каждому слагаемому последнего равенства правило умножения вероятностей $P(AH_i)=P(H_i) \cdot P(AH_i)$, получим требуемую формулу (1).

Пример. В учебных мастерских на станках a, b и c изготовляют соответственно 25, 35 и 40 % всех деталей. В их продукции брак составляет соответственно 15, 12 и 6 %. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь дефектна.

Решение. Обозначим события: A – «наугад взятая деталь дефектна», H_1 – «деталь изготовлена на станке a», H_2 – «деталь изготовлена на станке b», H_3 – «деталь изготовлена на станке c».

Очевидно, что события H_1, H_2, H_3 образуют полную группу и $P(H_1) = 0{,}25$, $P(H_2) = 0{,}35$, $P(H_3) = 0{,}4$. Кроме того, числа 0,15; 0,12; 0,06 (15 %, 12 %, 6 %) являются условными вероятностями события A при выполнении событий (гипотез) H_1, H_2, H_3 соответственно, т. е.

$$P(A|H_1)=0{,}15,\ P(A|H_2,)=0{,}12,\ P(A|H_3)=0{,}06.$$

По формуле (1) находим

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)=P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)+P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2)+$$

$$+P(H_3)\cdot P(A\,|\,H_3)=0{,}25\cdot 0{,}15+0.35\cdot 0{,}12+0{,}4\cdot 0{,}06=0{,}1035.$$

Формула Бейеса

С помощью формулы полной вероятности можно доказать *формулу Бейеса:*

$$P(H_i\,|\,A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)}{P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)+P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2)+\mathbf{K}+P(H_n)\cdot P(A\,|\,H_n)}.\ (2)$$

Доказательство. Из теоремы 3 о вероятности произведения двух зависимых событий A и B имеем

$$P(AH_i)=P(H_i\,|\,A)\cdot P(A)\ \Leftrightarrow\ P(H_i\,|\,A)=\frac{P(AH_i)}{P(A)}\ \Leftrightarrow\ P(H_i\,|\,A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)}{P(A)}.$$

Заменив в последнем равенстве $P(A)$ его значением из формулы (1), получаем формулу Бейеса (2).

Формула Бейеса позволяет переоценивать вероятности гипотез, принятые до испытания, по результатам уже произведенного испытания.

Пример. Имеются три одинаковые по виду урны. В первой урне 15 белых шаров, во второй – 10 белых и 5 черных, в третьей – 15 черных шаров. Из выбранной наугад урны вынули белый шар. Найти вероятность того, что шар вынут из первой урны.

Решение. Введем обозначения: событие А – «появление белого шара»; гипотезы: H_1 – «выбор первой урны», H_2 – «выбор второй урны», H_1 – «выбор третьей урны».

Имеем:

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

$$P(A\,|\,H_1)=1,\quad P(A\,|\,H_2)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3},\quad P(A\,|\,H_3)=0.$$

Искомую вероятность находим по формуле (2):

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)}{P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)+P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2)+P(H_3)\cdot P(A\,|\,H_3)}=$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 0} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Формула Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность того, что произойдет событие A, равна p, а следовательно, вероятность того, что оно не произойдет, равна q=1–p. Требуется найти вероятность того, что при n повторных испытаниях событие A произойдет m раз. Искомую вероятность обозначим $p_{m,\,n}$.

Событие, состоящее в том, что событие A происходит при каждом из m первых испытаний и не происходит при остальных n-m испытаниях, можно записать в виде

$$\underbrace{A\cdot A\ldots A}_{m}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\ldots\overline{A}}_{n-m}.$$

Так как все n испытаний, по условию, независимы, то можно применить правило вычисления вероятности произведения независимых событий; получим

$$P(\underbrace{A\cdot A\ldots A}_{m}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\ldots\overline{A}}_{n-m}) = p^m q^{n-m}.$$

Событие A может произойти m раз при n испытаниях, но при этом может получиться и другая последовательность чередований событий A и $\overline{A}$, однако каждый раз получим одну и ту же вероятность $p^m q^{n-m}$. Очевидно, что число чередований событий A и $\overline{A}$ равно числу сочетаний C_n^m из n элементов по m, поэтому по теореме сложения вероятностей для несовместных событий искомая вероятность вычисляется по формуле

$$p_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Эта формула называется *формулой Бернулли*.

Примеры:

1. В урне 20 шаров: 15 белых и 5 черных. Вынули подряд 5 шаров, причем каждый вынутый шар возвращается в урну и перед извлечением следующего шары в урне тщательно перемешиваются. Найти вероятность того, что из пяти вынутых шаров будет два белых.

Решение. Вероятность появления белого шара в каждом испытании равна $p=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$, а вероятность непоявления белого шара равна $q=1-p=\frac{1}{4}$. По формуле Бернулли находим

$$p_{2,5}=C_5^2 p^2 q^{5-2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{45}{512}.$$

2. Вероятность того, что расход электроэнергии в университете в течение одних суток не превысит установленной нормы, равна p = 0,85. Найти вероятность того, что в ближайшие 25 суток расход электроэнергии в течение 20 суток не превысит нормы.

Решение. Так как вероятность нормального расхода электроэнергии на протяжении каждых из 25 суток постоянна и равна p=0,85, то вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна q=1–p=1–0,85=0,15.

По формуле Бернулли находим искомую вероятность:

$$p_{20,25}=C_{25}^{20}p^{20}q^{25-20}=C_{25}^{5}(0{,}85)^{20}(0{,}15)^{5}\approx 0{,}156$$

Упражнения 7.5

1. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 20%, второй – 46%, третьей – 34%. Известно, что процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй – 2%, для третьей – 1%. Найдите вероятность того, что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на первой фабрике.

2. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 90% случаев. Какова вероятность того, что из 5 больных поправится не менее 4 ?

3. В квартире шесть электрических лампочек. Вероятность того, что каждая лампочка останется исправной в течение года, равна 5/6. Найдите вероятность того, что в течение года придется заменить две лампочки.

4. Вероятность попадания в мишень одним выстрелом равна 1/5. Найдите вероятность того, что из десяти выстрелов не будет ни одного попадания.

Тест

На факультете культурологии и социокультурной деятельности имеются 4 проектора. Вероятность того, что каждый проектор останется исправным в течение года, равна 3/4. Найдите вероятность того, что в течение года: а) все 4 проектора выйдут из строя; б) ни один проектор не выйдет из строя; в) выйдет из строя хотя бы один проектор; г) выйдет из строя не более 2 проекторов; д) выйдет из строя не менее 2 проекторов.

Ответ выберите из списка: а) 67/256; б) 1/256; в) 81/256; г) 175/256; д) 243/256.

7.6. Дискретная случайная величина

Определение. *Случайной величиной* называется переменная X, которая в результате испытания может принять одно и только одно значение, не известное заранее и зависящее от исхода испытания.

Примеры:

1. При бросании игральной кости случайной является величина X – число очков, которое выпадет на верхней грани. Возможными значениями величины X служат числа 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2. Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина X, возможными значениями которой являются числа 0, 1, 2, …, 100.

Определение. Величина X называется *дискретной случайной величиной*, если множество ее возможных значений представляет собой конечную или бесконечную последовательность чисел x_1, x_2, … , x_n, … и если каждое соотношение $X = x_i$ (i = 1,2, …) является элементарным случайным событием и имеет определенную вероятность $p_i = P(X = x_i)$. Под $X = x_i$ понимается событие, состоящее в том, что величина X принимает значение x_i.

Мы будем рассматривать дискретные случайные величины лишь с конечными множествами значений.

Определение. *Законом распределения дискретной случайной величины X* называется соответствие между возможными значениями x_i и их вероятностями p_i .

Закон распределения (как и всякую функцию) можно задать *таблично*, *аналитически* и *графически*. Если случайная величина X может принимать лишь конечное число различных значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, то элементарные события $X = x_1$, $X = x_2, \dots, X = x_n$ образуют полную группу и поэтому сумма их вероятностей равна единице, т. е.

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Закон распределения такой величины может быть представлен в виде таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Вот, например, как выглядит таблица распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа очков, выпадающего при бросании правильной игральной кости:

X	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Математическое ожидание

Определение. *Математическим ожиданием* $\mathbf{M}(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений x_i на их вероятности p_i:

$$\mathbf{M}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n \,. \qquad (1)$$

Пример. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная ее закон распределения:

X	–1	0	1	2	3
p	0,2	0,1	0,25	0,15	0,3

Решение. По формуле (1) находим

$$\mathbf{M}(X) = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}15 + 3 \cdot 0{,}3 = 1{,}25\,.$$

Пусть при проведении n независимых испытаний дискретная случайная величина X может принимать m_1 раз значение x_1, m_2 раз значение x_2, …, m_k раз значение x_k. Тогда сумма всех значений величины X равна

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_k m_k\,.$$

Найдем среднее арифметическое $\overline{X}$ значений, принимаемых величиной X:

$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \frac{m_k}{n}.$$

Но

$$\frac{m_1}{n} = P(X = x_1) = p_1, \qquad \frac{m_2}{n} = P(X = x_2) = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{m_k}{n} = P(X = x_k) = p_k,$$

поэтому

$$\overline{X} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k = \mathbf{M}(X).$$

Таким образом, $\mathbf{M}(X) = \overline{X}$, т. е. математическое ожидание дискретной случайной величины X равно среднему арифметическому полученных значений этой величины.

Пример. Найти среднее значение количество очков при бросании двух игральных костей.

Решение. Значениями дискретной случайной величины X в нашем примере являются числа 2, 3, 4, … , 12. Поскольку среднее значение равно математическому ожиданию, то получим

$$\mathbf{M}(X) = 2\times\frac{1}{36} + 3\times\frac{2}{36} + 4\times\frac{3}{36} + 5\times\frac{4}{36} + 6\times\frac{5}{36} + 7\times\frac{6}{36} + 8\times\frac{5}{36} +$$
$$+ 9\times\frac{4}{36} + 10\times\frac{3}{36} + 11\times\frac{2}{36} + 12\times\frac{1}{36} = 7.$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1) Математическое ожидание постоянной величины C равно самой постоянной:

$$\mathbf{M}(C) = C.$$

2) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$\mathbf{M}(X+Y) = \mathbf{M}(X) + \mathbf{M}(Y).$$

3) Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$\mathbf{M}(X \times Y) = \mathbf{M}(X) \cdot \mathbf{M}(Y).$$

4) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$\mathbf{M}(CX) = C \times \mathbf{M}(Y).$$

Дисперсия

Рассмотрим следующий пример. Найти математическое ожидание случайных величин X и Y, зная законы их распределения:

X	–8	–4	–1	1	3	7
p	1/12	1/6	1/4	1/6	1/12	1/4

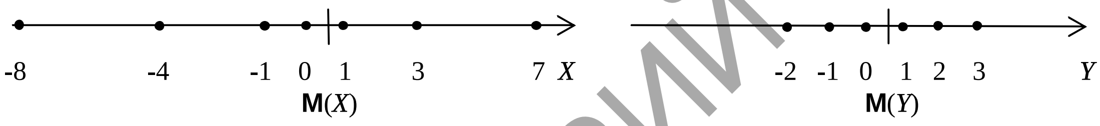
Y	–2	–1	0	1	2	3
p	1/6	1/6	1/12	1/3	0	1/4

Решение. По формуле (1) имеем:

$$\mathbf{M}(X) = -\frac{8}{12}-\frac{4}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{3}{12}+\frac{7}{4}=\frac{7}{12}\ ,$$

$$\mathbf{M}(Y) = -\frac{2}{6}-\frac{1}{6}+0+\frac{1}{3}+0+\frac{3}{4}=\frac{7}{12}\ .$$

Мы получили любопытный результат: законы распределения величин X и Y разные, а их математические ожидания одинаковы. Из рис. 3 видно, что значения величины Y сосредоточены около математического ожидания $\mathbf{M}(Y)$ (рис. 3б), а значения величины X разбросаны (рассеяны) подальше от математического ожидания $\mathbf{M}(X)$ (рис. 3а).



а) *б)*

Рис. 3. Две дискретные величины с одинаковым математическим ожиданием

Основной числовой характеристикой рассеяния возможных значений случайной величины X служит *дисперсия* $\mathbf{D}(X)$, которая определяется по формуле

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}(X))^2\ . \qquad (2)$$

Величина $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}(X)}$ называется средним квадратическим отклонением случайной величины X.

Преобразуем формулу (2) следующим образом:

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}(X))^2 = \mathbf{M}(X^2 - 2X \cdot\mathbf{M}(X) + \mathbf{M}^2(X)) =$$
$$= \mathbf{M}(X^2) - 2\mathbf{M}(X)\mathbf{M}(X) + \mathbf{M}^2(X) = \mathbf{M}(X^2) - \mathbf{M}^2(X)\ .$$

При преобразовании использовались свойства математического ожидания и тот факт, что $\mathbf{M}(X)$ – величина постоянная.

Таким образом,

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}(X^2) - \mathbf{M}^2(X)\ . \qquad (3)$$

Формулу (3) использовать для вычисления значения дисперсии проще, чем формулу (2).

Пример. Дискретная случайная величина распределена по закону:

X	–1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти $\mathbf{D}(X)$.

Решение. Сначала найдем

$$\mathbf{M}(X) = -1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot\ 0{,}3 + 2\cdot 0{,}4 = 0{,}9,$$

а затем

$$\mathbf{M}\ (X^2) = 1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot\ 0{,}3 + 4\cdot 0{,}4 = 2{,}1.$$

По формуле (3) имеем:

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}(X^2) - \mathbf{M}^2(X) = 2{,}1 - 0{,}81 = 1{,}29.$$

Закон больших чисел

Основная особенность случайной величины состоит в том, что нельзя заранее предвидеть, какое из возможных значений она примет в результате испытания. Однако при достаточно большом числе испытаний суммарное поведение случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным. Весьма важным при этом является знание условий возникновения закономерностей случайной величины. Эти условия составляют содержание ряда теорем, получивших общее название закона больших чисел. Впервые этот закон (в простейшей его форме) был сформулирован Яковым Бернулли в виде теоремы, устанавливающей связь между вероятностью случайного события и его относительной частотой.

Относительной частотой $W(A)$ случайного события A называют отношение числа m_n испытаний, в результате которых событие произошло, к общему числу n проведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m_n}{n}\ .$$

Оказывается, что при многократном повторении испытания относительная частота случайного события принимает значения, близкие к вероятности того, что оно произошло в результате одного испытания. Например, знаменитый статистик К. Пирсон бросил монету 24000 раз и получил при этом

12012 гербов, что дает относительную частоту, очень близкую к вероятности, равной 1/2, появления герба в одном испытании.

Теорема Бернулли. С вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом числе независимых испытаний относительная частота случайного события как угодно мало отличается от его вероятности при отдельном испытании.

Наиболее общим законом больших чисел является теорема П. Л. Чебышева.

Теорема Чебышева. Если X_1, X_2, …, X_n – независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то последовательность $\{\overline{X}_n - \mathbf{M}(\overline{X}_n)\}$ сходится по вероятности к нулю при $n \to \infty$, т. е.

$$\{\overline{X}_n - \mathbf{M}(\overline{X}_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

или

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{M}(\overline{X}_n), \qquad (1)$$

где

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

$$\mathbf{M}(\overline{X}_n) = \frac{\mathbf{M}(X_1) + \mathbf{M}(X_2) + \ldots + \mathbf{M}(X_n)}{n}.$$

Отметим, что если все случайные величины X_n имеют одно и то же математическое ожидание a:

$$\mathbf{M}(X_n)=a \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

то математическое ожидание среднего арифметического $\overline{X}_n$ также совпадает с a:

$$\mathbf{M}(\overline{X}_n) = a \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

В этом случае соотношение (1) принимает вид

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a.$$

Сущность теоремы Чебышева состоит в том, что среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин с равномерно ограниченными дисперсиями утрачивает характер случайной величины.

Упражнения 7.5

1. Закон распределения дискретной случайной величины X задан следующей таблицей:

X	-2	-1	1	3
p	0,1	0,27	0,34	0,29

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 8 и 5. Найдите вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10;20).

3. Закон распределения дискретной случайной величины X задан следующей таблицей:

X	0	1	2	3	4
p	0,13	0,35	0,35	0,15	0,02

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

4. Найдите математическое ожидание случайной величины X, если закон ее распределения задан таблицей:

X	1	2	3	4
p	0,3	0,1	0,2	0,4

5. Найдите дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	0	1	2	3	4
p	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

6. Значения дискретной случайной величины X образованы количеством очков при бросании 4 игральных костей. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Тест

Чему равно математическое ожидание количества: а) гербов при бросании 3 монет; б) очков при бросании 2 игральных костей; в) гербов при бросании 2 монет; г) гербов при бросании 4 монет; д) очков при бросании 3 игральных костей.

Ответ выберите из списка: а) 7; б) 1; в) 2; г) 1,5; д) 10,5.

Задачи

1. В коробке 8 белых и 6 черных шаров. Из коробки наугад вынимаются два шара. Найдите вероятность того, что:

а) оба шара черные;

б) оба шара разного цвета.

2. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Пять карточек вынимаются наугад одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Найдите вероятность того, что получится слово «конец».

3. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна 0,9, на второй – 0,9, на третий – 0,8. Найдите вероятность того, что студент сдаст экзамен, если необходимо ответить хотя бы на два вопроса билета.

4. Вероятность подключения абонента к каждой из четырех АТС соответственно равна 0,2; 0,36; 0,16; 0,28. Вероятность соединения с абонентом в случае его подключения к первой АТС равна 0,12, ко второй – 0,125, к третьей – 0,3, к четвертой – 0,75. Какова вероятность соединения ?

5. Вероятность того, что машина, взятая напрокат, будет возвращена исправной, равна 0,8. Какова вероятность, что из 4 возвращенных машин 3 окажутся исправными ?

6. В группе 30 студентов, из которых отличников – 8, хорошо успевающих – 13 и слабо успевающих – 9. На предстоящем экзамене отличники могут получить только оценки «5», хорошо успевающие могут получить с равной вероятностью оценки «4» и «5», слабо успевающие могут получить с равной вероятностью оценки «3», «4» и «5». Для сдачи экзамена вызывается наугад один студент. Найдите вероятность того, что он получит оценку не ниже «4».

7. У рыбака есть три излюбленных места рыбалки, которые он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность клева на первом месте равна 1/3, на втором – 1/2, на третьем – 1/4. Рыбак забросил удочку три раза, а рыба клюнула только один

раз. Найдите вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

8. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором 30 деталей, из них 24 стандартных, в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.

9. Какие из событий являются частью другого события:

а) A – «попадание в мишень первым выстрелом», B – «попадание в мишень по меньшей мере одним из 4 выстрелов», C – «попадание точно в мишень одним из 2 выстрелов», D – «попадание в мишень не более чем 5 выстрелами»;

б) А – «появление 3 очков при бросании игральной кости», В – «появление не более 3 очков при бросании игральной кости», С – «появление не более 4 очков при бросании игральной кости»?

10. Событие A – «появление 6 очков при бросании игральной кости»; событие B – «появление 5 очков при бросании игральной кости», событие C – «появление 4 очков при бросании игральной кости».

В чем состоит событие $A+B+C$?

11. Событие A_1 –«появление четного числа очков при бросании игральной кости», событие A_2 – «появление 2 очков при бросании игральной кости», событие A_3 – «появление 4 очков при бросании игральной кости», событие A_4 – «появление 6 очков при бросании игральной кости».

Докажите, что:

1) $A_1\overline{A}_4=A_2+A_3$; 2) $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4=V$; 3) $A_1\overline{A}_3\overline{A}_4=A_2$; 4) $A_1A_2=A_2$; 5) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3=A_4$; 6) $A_2A_3=V$;

12. Рассмотрев конкретные события A, B, C, убедитесь в том, что:

$AB=BA$; $A(BC)=(AB)C$; $A(B+C)=AB+AC$; $A+BC=(A+B)(A+C)$;

$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$; $\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}$; $(A+B)(A+C)(B+C)=AB+AC+BC$.

13. Наудачу отобранная деталь может оказаться или первого сорта (событие A), или второго (событие B), или третьего (событие C).

В чем состоят события: $A+B$; $\overline{A+C}$; AC; $AB+C$?

14. Пусть A, B и C – случайные события, выраженные подмножествами одного и того же множества элементарных событий. Запишите событие, означающее, что:

а) произошло только событие A;

б) произошло одно и только одно из данных событий;

в) произошло два и только два из данных событий;

г) произошли все три события;

д) произошло хотя бы одно из данных событий.

15. Событие A – «получение достаточной для сдачи экзамена оценки», событие B – получение «девятки». В чем состоят события $A–B$, $A-\overline{B}$, $\overline{A}-B$, $\overline{A-B}$ и $\overline{A}-\overline{B}$?

16. Событие A – «появление 3 очков при бросании игральной кости», событие B – «появление нечетного числа очков», событие C – «появление не больше 5 очков». В чем состоит событие $AB-\overline{C}$?

17. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей: а) при бросании игральной кости выпало 4 очка; б) при двух бросаниях игральной кости выпало в сумме не менее 3 очков; в) при бросании игральной кости выпало нечетное число очков.

18. Десять лучших спортсменов университета будут участвовать в межуниверситетских соревнованиях по бегу. Сколькими способами можно отобрать: а) 2 человека для участия в соревнованиях по бегу на 100 м; б) 4 человека для участия в эстафете 4 по 100 м; в) 4 человека для участия в эстафете 100 м + 200 м + 400 м + 800 м; г) 3 человека для участия в забеге на 3 км?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белько, И. В.* Высшая математика для экономистов. I семестр: экспресс-курс / И. В. Белько, К. К. Кузьмич. – М.: Новое знание, 2002. – 140 с.

2. *Белько, И. В.* Высшая математика для экономистов. II семестр: экспресс-курс / И. В. Белько, К. К. Кузьмич. – М.: Новое знание, 2003. – 88 с.

3. *Бочаров, В. А.* Основы логики: учебник / В. А. Бочаров, В. И. Маркин. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 296 с.

4. *Бураўкін, А. Г.* Інфармацыйныя тэхналогіі ў мастацтве / А. Г. Бураўкін. – Мінск: Бел. ун-т культуры, 1999. – 250 с.

5. *Валуцэ, И. И.* Математика для техникумов на базе средней школы / И. И. Валуцэ, Г. Д. Димигул. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

6. *Гмурман, В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – Минск: Выш. шк., 1972. – 479 с.

7. *Гринберг, А. С.* Высшая математика: учеб. пособие / А. С. Гринберг [и др.]. – Минск: АУ, 2002. – Ч. 1. – 280 с.

8. *Гусак, А. А.* Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак. – Минск: Навука і тэхніка, 1991. – 480 с.

9. *Еровенко, В. А.* Основы высшей математики для филологов: метод. указания и примеры: курс лекций / В. А. Еровенко. – Минск: БГУ, 2006. – 240 с.

10. *Жданович, В. Ф.* Задания к лабораторным работам по курсу теории вероятностей и математической статистики: в 2 ч. / В. Ф. Жданович, Н. В. Лазакович, Н. Я. Радыно, С. П. Сташуленок. – Минск: БГУ, 1999. – Ч. 2. – 47 с.

11. *Жданович, В. Ф.* Задания к лабораторным работам по курсу теории вероятностей и математической статистики: в 2 ч. / В. Ф. Жданович, Н. В. Лазакович, Н. Я. Радыно. – Минск: БГУ, 1998. – Ч. 1. – 36 с.

12. *Кирьянов, Д. В.* Mathcad 13 / Д. В. Кирьянов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 598 с.

13. Критофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М.: Мир, 1978. – 432 с.

14. Кузнецов, А. В. Высшая математика: общий курс / А. В. Кузнецов [и др.]. – Минск: Выш. шк., 1993. – 318 с.

15. Кук, Д. Компьютерная математика: пер. с англ. / Д. Кук, Г. Бейз. – М.: Наука, 1990. – 384 с.

16. Лазакович, Н. В. Теория вероятностей / Н. В. Лазакович, С. П. Сташуленок, О. Л. Яблонский. – Минск: БГУ, 2007. – 311 с.

17. Математическая логика: учеб. пособие / Л. А. Латотин [и др.]; под общ. ред. А. А. Столяра. – Минск: Выш. шк., 1991. – 269 с.

18. Математическая логика: учеб. пособие / Л. А. Латотин [и др.]; под общ. ред. А. А. Столяра. – Минск: Выш. шк., 1991. – 269 с.

19. Мендельсон, Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

20. Милованов, М. В. Алгебра и аналитическая геометрия / М. В. Милованов [и др.]. – Минск: Выш. шк., 1984. – 302 с.

21. Нешитой, В. В. Математико-статистические методы анализа в библиотечно-информационной деятельности: учеб.-метод. пособие / В. В. Нешитой. – Минск: БГУ культуры и искусств, 2009. – 203 с.

22. Плис А. И. MathCAD: математический практикум для экономистов и инженеров / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М.: Финансы и статистика,1999.

23. Плющ, О. Б. Практикум по высшей математике. Математический анализ: задачи и упражнения для практических занятий. – Ч. 2. / О. Б. Плющ. – Минск: Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 2005. – 58 с.

24. Плющ, О. Б. Практикум по высшей математике: задания и упражнения для практических занятий на персональном компьютере. – Ч. 1. / О. Б. Плющ, Б. В. Новыш. – Минск: Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 2004. – 85 с.

25. *Справочник* по математике для экономистов / В. Е. Барбаумов [и др.]; под ред. В. И. Ермакова. – М.: Высш. шк., 1987. – 336 с.

26. *Турецкий, В. Я.* Математика и информатика / В. Я. Турецкий. – 3-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 506 с.

27. *Элементы* линейной алгебры / под общ. ред. Р. Ф. Апатенок / Минск: Выш. шк., 1977. – 256 с.

УКАЗАТЕЛЬ

П

Р

С

Т

У

Ф

Ц

Ч

Э

Учебное издание

ГЛЯКОВ Петр Владимирович

ПЕСЕЦКАЯ Татьяна Ивановна

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Редактор И. В. Смеян
Технический редактор А. В. Гицкая

Подписано в печать 2012. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$.
Бумага писчая № 2. Ризография.
Усл. печ. л. 11,27. Уч.-изд. л. 10,64. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Белорусский государственный университет культуры и искусств».
ЛИ № 02330/0003939 от 19.08.2011.
Ул. Рабкоровская, 17, 220007, г. Минск.