Учреждение образования
«Белорусский государственный университет культуры и искусств»

Факультет культурологии и социально-культурной деятельности
Кафедра информационных технологий в культуре

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой	Декан факультета
_______________Т.С. Жилинская	__________Н.Е. Шелупенко
«21» 12 20 22 г.	«26» 12 20 22 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

для специальности: 6-05-0314-03 Социально-культурный менеджмент и коммуникации
профилизации: Мультимедийные технологии и цифровые коммуникации

Составители:
Т.И. Песецкая, доцент кафедры информационных технологий в культуре учреждения образования «Белорусский государственный университет культуры и искусств», кандидат физико-математических наук

В.С. Якимович, доцент кафедры информационных технологий в культуре учреждения образования «Белорусский государственный университет культуры и искусств», кандидат педагогических наук

Рассмотрено и утверждено на заседании Совета факультета культурологии и социально-культурной деятельности
«_26_» _декабря_ 2022 г протокол № _5_

Рецензенты:

кафедрой информационных технологий в *культуре* (протокол № 5 от 21.12.2022,);

советом факультета культурологии и социально-культурной деятельности (протокол № 5 от 26.12.2022).

Ответственный за редакцию:__________
Ответственный за выпуск Т.И. Песецкая

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬЕАЯ ЗАПИСКА

В соответствии с учебными планами дисциплина «Прикладная математика» предназначена для изучения студентами высших учебных заведений по специальности 1-2104 01 Культурология (по направлениям) направления специальности 1-21 04 01-02 Культурология (прикладная) специализации 1-21 04 01-02 04 Информационные системы в культуре.

Цель изучения дисциплины «Прикладной математики» − формирование теоретических знаний, умений и навыков в области применения математических методов для моделирования информационных процессов сферы культуры и искусств и анализа культурологических данных.

Изучение дисциплины «Языки и системы программирования» даст возможность формировать у студентов базовые профессиональные компетенции в области проектирования и разработки программного обеспечения, знакомя их с основными парадигмами объектно-ориентированного и визуального программирования. Позволит студентам не только усвоить основные понятия и конструкции современных языков программирования, но и изучить на их основе технологию разработки программ, освоить основные типы данных и простейшие алгоритмы, научиться применять теоретические знания при разработке прикладных программ для сферы культуры и искусства.

Учебная дисциплина «Прикладная математика» относится к вариативной части профессионального цикла дисциплин. Она связана с дисциплинами: «Языки и системы программирования», «Алгоритмы обработки данных», «Системный анализ и моделирование информационных процессов». Знания, полученные по дисциплине, являются основой для дальнейшего более углубленного изучения вопросов математических моделей в профессиональной деятельности, а также для подготовки курсовых и дипломных работ.

Основными *задачами* дисциплины являются:

– изучение основных понятий линейной алгебры, теории графов, теории вероятностей, математической статистики и теории фракталов;

– знакомство с центральными теоремами и методами указанных разделов математики;

– приобретение умений постановки и решения практических задач математическими методами;

– приобретение умений построений математических моделей для изучения и оптимизации процессов сферы культуры и искусства.

В результате изучения дисциплины студенты должны *знать*:

– основные понятия теории графов, теории вероятностей и математической статистики, теории фракталов;

– основные математические модели теории графов, теории вероятностей и математической статистики, теории фракталов, применяемые для анализа экономических, информационных, социальных процессов сферы культуры;

– подходы и методы к математическому моделированию экономических, информационных, социальных процессов сферы культуры и искусства;

– подходы к анализе данных методами математической статистики.

Студенты должны *уметь*:

– моделировать экономические, информационные, социальные процессы сферы культуры и искусства;

– решать задачи оптимизации экономических, информационных, социальных процессов сферы культуры и искусства;

– анализировать культурологические данные методами математической статистики;

В результате изучения учебной дисциплины «Прикладная математика» студент должен *владеть* методами и приемами математического моделирования и анализа данных сферы культуры и искусств.

Освоение данной учебной дисциплины обеспечивает формирование следующих компетенций:

АК-1. Уметь использовать, базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Уметь работать самостоятельно.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работай с компьютерам.

АК-10. Владеть методическими знаниями и исследовательскими умениями, которые обеспечиваются решением задач инновационно-методической и научно-исследовательской деятельностью в области культурологии.

САК-5. Быть способным к критике и самокритике.

САК-6. Уметь работать в команде.

ПК-3. Реализовывать общегосударственные, региональные и ведомственные программы и проекты в области культуры и искусства.

ПК-8. Анализировать и оценивать собранные действия.

ПК-19. Разрабатывать социально-культурные проекты в коммерческой, финансово-хозяйственной деятельности.

Согласно учебным планам на изучение учебной дисциплины «Прикладная математика» отведено всего 102 часа, в том числе 62 часов аудиторных занятий, из них лекции − 18 часов, практические и семинарские занятия − 24 часа, лабораторные занятия − 20 часов. Дисциплина рассчитана на один семестр. Текущий контроль осуществляется при выполнении и сдаче лабораторных работ. Форма контроля – экзамен.

Разделы и темы	Количество аудиторных часов				
	всего	лекции	лабора-торные занятия	семинары	практи-ческие занятия
Тема 1. Введение в прикладную математику	1	1			
Тема 2. Матрицы	3	1			2
Тема 3. Системы линейных уравнений	4		2		2
Тема 4. Основные понятия теории графов	4	2			2
Тема 5. Задачи оптимизации на графах	6	2	2		2
Тема 6. Основные понятия теории вероятности	4	2			2
Тема 7. Операции над вероятностями	6	2			4
Тема 8. Дискретная случайная величина	4	2			2
Тема 9. Основные распределения слу-чайных величин	4	2	2		
Тема 10. Основные понятия математической статистики	6	2	4		
Тема 11. Основы фрактальной геометрии	6	2	2		2
Тема 12. Математические модели и их применение для решения задач сферы культуры	14		8		6
Всего	**62**	**18**	**20**		**24**

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УЧЕБНЫЕ ИЗДАНИЯ

1. *Гляков, П.В.* Основы высшей математики : учеб. поособие / П.В. Гляков, Т.И. Песецкая. – Минск : БГУ культуры и искусств, 2012. – 194 с.

КОНСПЕКТЫ ЛЕКЦИЙ

Тема 1. Введение в прикладную математику

Современные информационные технологии позволяет любому пользователю вне зависимости от образования, профессиональной деятельности, навыков и умений легко осваивать технологии необходимые для того либо иного рода деятельности. Не секрет, что любой информационный ресурс базируется на тех либо иных математических алгоритмах. Однако знания математических основ требуется не только для создания информационных ресурсов, но и решения многих прикладных задач с их помощью.

Так, например, в моделировании 2D и 3D изображений широко применяется такой математический объект как матрица. Знакомство с этим объектом не обязательно для пользователя графического редактора, но необходимо для его создания. Например, с помощью матриц задаются координаты объекта и осуществляются операции по его перемещениям. Рассмотрим случай однородной двумерной системы координат. Здесь координаты объекта задаются в виде матрицы размером n × 3:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ . & . & . \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$$

где x_i и y_i–координаты вершин объекта по осям X и Y, n - количество строк матрицы соответствует количеству вершин объекта, каждая из которых занимает в матрице свою строку. Значения третьего столбца соответствуют масштабирующему множителю.

Базовым преобразованиям двумерных объектов является преобразование, которое можно выполнить за один шаг с помощью матрицы преобразования:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ . & . & . \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ l & m & s \end{pmatrix}}_{\substack{\text{матрица} \\ \text{преобразования}}} = \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ . & . & . \\ x'_n & y'_n & 1 \end{pmatrix}$$

Каждый параметр матрицы преобразования отвечает определенный вид преобразования.

- перенос (параметры ***l, m***);
- масштабирование (параметры ***a, e, s***);
- зеркальное отображение относительно осей или начала координат (параметры ***a, e, s***);
- сдвиг (параметры ***b, d***);
- проецирование (параметры ***p, q***);
- вращение вокруг осей координат (параметры ***a, b, d, e***).

Теория **графов** широко используется, например, в логистике - области планирования, управления и контроля движения материальных, информационных и финансовых ресурсов в различных системах. Одной из первых логистических задач, решенную с помощью использования теории графов, можно считать задачу о Кенигсбергских мостах. В центральной части города Кенигсберг (ныне Калининград), включающей два берега реки Перголя, два острова и семь соединяющих мостов (Рисунок 1.1). Задача состоит в том, чтобы обойти все четыре части суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку. Задача была решена Эйлером в 1736 году. Он показал, что решения не существует.

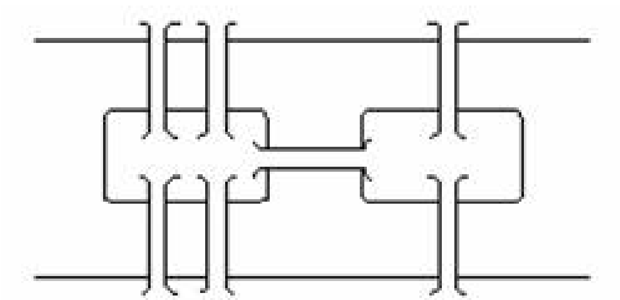


Рисунок 1 − Задача о Кенигсбергских мостах

Такие разделы математики как теория **вероятности и статистический анализ** широко применяются в исследованиях любой области человеческой деятельности от финансово-экономических исследований до исследований в области генетики от менеджмента качества до медицины. Развитие информационных технологий и сети интернет вывело возможности анализа с помощью статических методов на абсолютно новый уровень, стимулируя, в том числе и развитие самой статистики, как математической дисциплины. Современные статистические пакеты позволяют легко и быстро обрабатывать огромные массивы статистических данных, и с каждой следующей версией пополняются новым статистическим арсеналом, разработанным математиками. Последнее время активно статистический анализ используется в сфере продвижения и рекламы в интернет, помогая оптимизировать информационные потоки и направлять их целевым группам пользователей посредствам определенных интернет ресурсов, выбранных в результате статистического анализа.

Фракталы, относительно молодой математический объект, обязанный своему рождению и развитию изобретению компьютера. Диапазон применения фракталов невероятно широк. От создания спецэффектов и виртуальных декораций в кино до генерации музыкальных произведений. В современном изобразительном искусстве отдельным разделом выделена фрактальная графика. Ее уникальность заключается в том, что в создании произведения учувствуют как компьютер, генерирующий фрактальное изображение с помощью запрограммированного математического алгоритма, так и художник, управляющий генерацией изображения с помощью выбора параметров и настроек генерации и обрабатывающий полученное изображение с целью создания художественного произведения.

Тема 2. Матрицы

Матрицей размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица элементов a_{ij}, расположенных в m строках и n столбцах:

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где первый индекс i элемента a_{ij} означает номер столбца, второй индекс j номер строки. Элементами матрицы чаще всего являются числа, однако могут быть и другие математические объекты. Для сокращенного обозначения матрицы используют так же запись (a_{ij}).

Матрица размера $n\times n$ называется **квадратной матрицей порядка *n***

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Элементы a_{11}, a_{22} … a_{nn}, стоящие на диагонали квадрата, проходящей из левого верхнего угла в правый нижний, образуют **главную диагональ квадрата** и называются **главными диагональными элементами**. Элементы a_{1n}, $a_{2\,n-1}$ … a_{n1}, стоящие на диагонали квадрата, проходящей из правого верхнего угла в левый нижний, образуют побочную диагональ квадрата и называются **побочными диагональными элементами.** Матрица у которой все элементы равны нулю, кроме главных диагональных элементов называется **диагональной матрицей**.

Матрица, состоящая из одного столбца (строки) называется **матрицей-столбцом (матрицей-строкой)**.

Транспонированной матрицей A^T называется матрица, полученная из исходной матрицы A заменой строк на столбцы.

Симметричной (Симметрической) называют квадратную матрицу, элементы которой симметричны относительно главной диагонали, то есть $a_{ij} = a_{ji}$ для всех i, j.

Для симметрической матрицы верно $A = A^T$.

Произведение матрицы $A=(a_{ij})$ на число λ есть матрица $\lambda A=(\lambda\ a_{ij})$, где каждый ее элемент равен соответствующему элементу матрицы A умноженному на число λ.

Суммой $A+B$ двух матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$, имеющих одинаковый размер является матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$, имеющая тот же размер с элементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Сложение матриц одинакового размера происходит поэлементно.

Пример.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & -3\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Найти матрицу $C = (A + 2B)^T$.

Решение.

$$2\cdot B=2\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 6\\ 8 & -4 & 0\\ 6 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

$$A+2B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & -3\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2 & 6\\ 8 & -4 & 0\\ 6 & -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 6\\ 5 & -1 & -3\\ 10 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

$$C=(A+2B)^T=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 6\\ 5 & -1 & -3\\ 10 & -2 & 1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 10\\ 4 & -1 & -2\\ 6 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

Нулевой матрицей, обозначаемой O, называется матрица все элементы которой равны нулю.

Матрицей **противоположной** для матрицы $A = (a_{ij})$ является матрица $-A = (-a_{ij})$:

$A + (-A) = O$.

Таким образом, $B + (-A) = B - A$ и $-(-A) = A$.

Свойства сложения и умножения на числа.

1. Сложение матриц одинакового размера:

- ассоциативно $(A + B) + C = A + (B + C)$
- коммутативно $A + B = B + A$

2. Умножение матрицы А на числа λ, μ подчиняется правилам:

$(\lambda\mu)\cdot A = \lambda\cdot(\mu A)$; $0\cdot A = 0$; $\lambda\cdot O = O$; $(-1)\cdot A = -A$.

3. Сложение матриц и умножение на числа подчиняются законам дистрибутивности:

$(\lambda\mu)\cdot A = \lambda A + \mu A$, $\lambda\cdot(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

Произведением двух матриц $A_{m\times n}$ и $B_{n\times k}$ является матрица

$C_{m\times k} = A_{m\times n} \times B_{n\times k} = (c_{ij} = \sum_j^n a_{ir} \times b_{rj})$.

Важно отметить, что перемножение двух матриц $A_{m\times p}$ и $B_{s\times k}$ возможно при условии, что число того что число столбцов матрицы $A_{m\times p}$ равно числу строк матрицы $B_{s\times k}$, то есть $p = s$. Из этого следует, что для двух квадратных матриц одинакового размера перемножение всегда допустимо.

Пример.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = A\times B$.

Решение. Число столбцов матрицы A размерности 2×2 равно числу строк матрицы B размерности 2×3, следовательно матрицы можно перемножить. Согласно правилу перемножения матриц, итоговая матрица C будет иметь размерность 2×3:

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$.

$c_{11}=1\cdot(-1) +(-2)\cdot0=-1$; $c_{12}=1\cdot2 + (-2)\cdot1= 0$; $c_{13}=1\cdot0 + (-2)\cdot(-3)=6$;

$c_{21}=0\cdot(-1) + 3\cdot0=0$; $c_{22}=0\cdot2 + 3\cdot1=3$; $c_{23}=0\cdot0 + 3\cdot(-3)=-9$.

$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$.

Единичной матрицей E_n n-ого порядка называется диагональная матрица размерности $n\times n$, главные диагональные элементы которой равны 1:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Для единичной матрицы верно: $A\times E_n = E_m\times A = 0$.

Обратной матрицей для квадратной матрицы A называется матрица A^{-1}, такая, что $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$.

Один из способов нахождения обратной матрицы связан с такими понятиями как определитель матрицы, миноры и алгебраические дополнения.

Определителем квадратной матрицы второго порядка, является число Δ, равное разности произведения главных диагональных элементов и побочных диагональных элементов:

$A_{2\times2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

$det\, A_{2\times2} = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель квадратной матрицы третьего порядка можно найти **разложением по строке или столбцу.** Пусть имеется матрица третьего порядка A:

$$A_{3\times 3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен числу Δ, вычисленному разложением по первой строке:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}^{+} & a_{12}^{-} & a_{13}^{+} \\ a_{21}^{-} & a_{22}^{+} & a_{23}^{-} \\ a_{31}^{+} & a_{32}^{-} & a_{33}^{+} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Строка определителя состоит из трех элементов a_{11}, a_{12}, a_{13}, каждому из которых в соответствие поставлен знак "+" если сумма индексов элемента четна (для a_{11} это 1+1=2) или знак "-", если сумма индексов элемента нечетна (для a_{12} это 1+2=3). Далее каждый из элементов, взятый с соответствующим знаком умножается на определитель второго порядка, полученный из определителя третьего порядка вычеркиванием строки и столбца, в которой находится этот элемент. Например, для элемента a_{12}

$$-a_{12}\times\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}^{+}} & \cancel{a_{12}^{-}} & \cancel{a_{13}^{+}} \\ a_{21}^{-} & \cancel{a_{22}^{+}} & a_{23}^{-} \\ a_{31}^{+} & \cancel{a_{32}^{-}} & a_{33}^{+} \end{vmatrix}=-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

В этом случае определитель $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ называется **минором** элемента a_{12}, а число $A_{12}=(-1)^{1+2}\times M_{12}$ называется его **алгебраическим дополнением**.

Пример. Найти определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\det A=\begin{vmatrix} 3^{+} & 2^{-} & 1^{+} \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(0\cdot 3-2\cdot 1)-2\cdot(1\cdot 3-2\cdot 4)+1\cdot(1\cdot 1-0\cdot 4)=$$

$$=3(-2)-2(-5)+1(1)=-6+10+1=5.$$

Вычисление определителя четвертого порядка и далее порядка n осуществляется аналогично вычислению определителя третьего порядка разложением по строке или столбцу.

В общем случае **минором** M_{ij} определителя n-го порядка называют определитель $(n - 1)$-го порядка, полученный из исходного определителя вычеркиванием i-той строки и j-того столбца. Существуют так же миноры $(n – 2)$ порядка, которые получаются аналогично минорам $(n - 1)$-го порядка, при рассмотрении каждого из миноров M_{ij} в качестве определителя порядка (n - 1). **Алгебраическим дополнением** A_{ij} к элементу a_{ij} определителя n-го порядка называют число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$.

Рангом матрицы *A*, обозначаемым rang(A) называют наивысший из порядков миноров этой **матрицы**, определитель которых отличен от нуля.

Пример на нахождение ранга матрицы

Обратную матрицу A^{-1} для матрицы n-ого порядка A, можно вычислить согласно следующему правилу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения к элементу a_{ij}. Таким образом, обратная матрица A^{-1} для матрицы A существует при условии, что ее определитель не равен нулю, в этом случае говорят, что матрица A **обратима**.

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы А:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Определитель матрицы найден в предыдущем примере det A = 5.

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & 0 & 2 \\ \cancel{4} & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = -2.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ 1 & \cancel{0} & 2 \\ 4 & \cancel{1} & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 3 - 2 \cdot 4) = 5.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ 1 & 0 & \cancel{2} \\ 4 & 1 & \cancel{3} \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 4 = 1.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \cancel{3} & 2 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ \cancel{4} & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 3 - 1 \cdot 1) = -5.$$

Аналогично вычисляются другие алгебраические дополнения A_{22}=5, A_{23}=5, A_{31}=4, A_{32}= -5, A_{33}= -2.

Составим матрицу алгебраических дополнений и транспонируем ее:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -5 & 5 & 5 \\ 4 & -5 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 5 & 5 & -5 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \times \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 5 & 5 & -5 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -1 & \frac{4}{5} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица Q называется **ортогональной**, если $Q \times Q^T = Q^T \times Q = E$. Для ортогональной матрицы Q, ее обратная матрица равна транспонированной: $Q^T = Q^{-1}$.

Тема 3. Системы линейных уравнений

Система m уравнений с n неизвестными x_1 x_2 … x_n, вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

называется ***m×n*-системой линейных уравнений**; a_{ij} – коэффициенты системы, b_i - свободные члены (значения) системы. Если все $b_i = 0$, то система называется **однородной**, в противном случае **неоднородной**. Последовательность чисел (c_1, c_2,…,c_n) называется **решением линейной системы,** если ее элементы, подставленные в заданном порядке вместо неизвестных, удовлетворяют каждому из m уравнений. Совокупность всех решений системы называется **множеством решений**. Две системы линейных уравнений называются **эквивалентными или равносильными**, если они имеют одинаковые множества решений.

Однородные системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

всегда разрешимы, так как последовательность n чисел (0, 0,…, 0) всегда удовлетворяет всем уравнения системы. Нулевое решение называют **тривиальным решением однородной системы линейных уравнений.** Решение однородных систем линейных уравнений сводится к поиску нетривиальных решений.

Систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

тли же $A \times X = B$, где A – матрица коэффициентов системы X - столбец неизвестных, B – свободные значения системы. Характер множества решений системы зависит от ранга матрицы коэффициентов системы rang(A) и от ранга так называемой **расширенной матрицы системы** rang ($A|B$):

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Если для неоднородной системы $AX = B$ выполняется rang ($A|B$) $\neq$ rang(A), то система не имеет решений, то есть **неразрешима**. Говорят так же, что система **несовместна** либо **противоречива**. Если же ($A|B$) = rang(A) = r, то система $AX = B$ разрешима и имеет единственное решение при $r = n$, и бесконечное множество решений при $r < n$.

Эквивалентными преобразованиями системы линейных уравнений являются:

1) перемена местами двух уравнений в системе;

2) умножение какого-либо уравнения системы на действительное число отличное от нуля;

3) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Эквивалентные преобразования в системе линейных уравнений вызывают в матрице коэффициентов A и в расширенной матрице ($A|B$) преобразования, сохраняющие ранг, и приводящие к перестановке строк, умножению строки на число, отличное от нуля, и прибавление к одной строке другой, умноженной на произвольное число. Если преобразовывать матрицы A и ($A|B$) в матрицы A' и ($A'|B'$), применяя к строкам вышеописанные преобразования, сохраняющие ранг, то системы $AX = B$ и $A'X = B'$ будут эквивалентны. Алгоритм Гаусса состоит в том, чтобы получить матрицы A' и ($A'|B'$) трапециевидной формы:

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-2} & a_{2n-1} & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n-2} & a_{3n-1} & a_{3n} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{4n-2} & a_{4n-1} & a_{4n} & b_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mn-2} & a_{mn-1} & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Для простоты изложения представим метод Гаусса на конкретном примере. Решим систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 17, \\ 2x_1 + 7x_3 - 5x_4 + 11x_5 = 42, \\ -3x_1 + 9x_2 - 11x_3 - 7x_5 = -64, \\ 7x_1 - 17x_2 + 23x_3 + 15x_5 = 132. \end{cases}$$

Расширенная матрица системы будет иметь вид

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 2 & 17 \\ 2 & 0 & 7 & -5 & 11 & 42 \\ -3 & 9 & -11 & 0 & -7 & -64 \\ 7 & -17 & 23 & 0 & 15 & 132 \end{array}\right)$$

Для удобства изложения строки обозначены римскими цифрами.

Первый шаг

Обнуляем элементы первого столбца (под первой строкой), используя первую строку:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 2 & 17 \\ 2 & 0 & 7 & -5 & 11 & 42 \\ -3 & 9 & -11 & 0 & -7 & -64 \\ 7 & -17 & 23 & 0 & 15 & 132 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \mathrm{II} - 2 \times \mathrm{I} \\ \mathrm{III} + 3 \times \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} - 7 \times \mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 2 & 17 \\ 0 & 4 & 1 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 & -13 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right)$$

Из второй строки вычитаем первую, умноженную на 2 (II - 2×I). К третьей строке прибавляем первую, умноженную на 3 (III + 3×I). Из четвертой строки вычитаем первую, умноженную на 7 (IV - 7×I).

Второй шаг

Обнуляем элементы второго столбца (под второй строкой), используя вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 2 & 17 \\ 0 & 4 & 1 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 & -13 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ 4 \times \mathrm{III} - 3 \times \mathrm{II} \\ 4 \times \mathrm{IV} + 3 \times \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 2 & 17 \\ 0 & 4 & 1 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -11 & 15 & -25 & -76 \\ 0 & 0 & 11 & -15 & 25 & 76 \end{array}\right)$$

Третий шаг

Обнуляем элементы третьего столбца (под третьей строкой), используя третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 2 & 17 \\ 0 & 4 & 1 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 & -13 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \mathrm{I} - \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 2 & 17 \\ 0 & 4 & 1 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -11 & 15 & -25 & -76 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Нулевую четвертую строку исключим из рассмотрения, тогда расширенная матрица трапециевидной формы системы эквивалентной исходной будет иметь вид:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 2 & 17 \\ 0 & 4 & 1 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -11 & 15 & -25 & -76 \end{array}\right).$$

Запишем систему

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_5 &= 17, \\ 4x_2 + x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 8, \\ -11x_3 + 15x_4 - 25x_5 &= -76. \end{aligned}$$

В результате имеем три независимых уравнения, содержащие пять неизвестных. В этом случае три переменные выделяют как **базисные,** а оставшиеся две, как **свободные.** В нашем случае в качестве базисных выделим переменные x_1, x_2, x_3, тогда оставшиеся переменные x_4, x_5 будут свободными. Выразим базисные переменные через свободные, перенеся их в правую часть уравнений.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -2x_5 + 17, \\ 4x_2 + x_3 &= 5x_4 - 7x_5 + 8, \\ -11x_3 &= -15x_4 + 25x_5 - 76. \end{aligned}$$

Разделим третье уравнение на -11, выразив таким образом x_3.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -2x_5 + 17, \\ 4x_2 + x_3 &= 5x_4 - 7x_5 + 8, \\ x_3 &= \frac{15}{11}x_4 - \frac{25}{11}x_5 + \frac{76}{11}. \end{aligned}$$

Подставив выражение x_3 во втрое уравнение, можно выразить x_4, затем подставив выражения x_3, x_4 в первое уравнение найти x_1. Второй способ – воспользоваться так называемым обратным ходом метода Гаусса. Составим расширенную матрицу последней системы:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 0 & -2 & 17 \\ 0 & 4 & 1 & 5 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 15/11 & -25/11 & 76/11 \end{array}\right.\right)$$

Из второй строки вычтем третью (II - III), а из первой третью умноженную на 3 (I - 3×III)) получим

$$\left(\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -45/11 & 53/11 & -41/11 \\ 0 & 4 & 0 & 40/11 & -52/11 & 12/11 \\ 0 & 0 & 1 & 15/11 & -25/11 & 76/11 \end{array}\right.\right)$$

Разделим вторую строку на 4 (II : 4):

$$\left(\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -45/11 & 53/11 & -41/11 \\ 0 & 1 & 0 & 10/11 & -13/11 & 4/11 \\ 0 & 0 & 1 & 15/11 & -25/11 & 76/11 \end{array}\right.\right)$$

Прибавим к первой строке вторую умноженную на 2 (I + 2×II):

$$\left(\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -25/11 & 27/11 & -35/11 \\ 0 & 1 & 0 & 10/11 & -13/11 & 4/11 \\ 0 & 0 & 1 & 15/11 & -25/11 & 76/11 \end{array}\right.\right)$$

Теперь выпишем решение системы

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{10}{11}x_4 + \frac{27}{11}x_5 - \frac{35}{11}, \\ x_2 &= \frac{10}{11}x_4 - \frac{13}{11}x_5 + \frac{4}{11}, \\ x_3 &= \frac{15}{11}x_4 - \frac{25}{11}x_5 + \frac{76}{11}, \\ & x_4 \in R, \ \ x_5 \in R. \end{aligned}$$

Поскольку система имеет бесконечное множество решений, полученное решение называется **общим решением** системы. Подставляя конкретные значения свободных переменных в общее решение системы, будем получать частные решения системы.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + 3x_3 = 51; \\ 3x_2 - 26x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 141; \\ -5x_1 + 47x_2 - 15x_3 + 5x_4 = -225; \\ 6x_2 + 2x_3 - 7x_4 = -49. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы будет иметь вид

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 3 & 0 & 51 \\ 3 & -26 & 8 & 3 & 141 \\ -5 & 47 & -15 & 5 & -225 \\ 0 & 6 & 2 & -7 & -49 \end{array}\right)$$

Обнуляем элементы первого столбца:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 3 & 0 & 51 \\ 3 & -26 & 8 & 3 & 141 \\ -5 & 47 & -15 & 5 & -225 \\ 0 & 6 & 2 & -7 & -49 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} - 3 \times \mathrm{I} \\ \mathrm{III} + 5 \times \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 3 & 0 & 51 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & 5 & 30 \\ 0 & 6 & 2 & -7 & -49 \end{array}\right).$$

Обнуляем элементы второго столбца:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 3 & 0 & 51 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & 5 & 30 \\ 0 & 6 & 2 & -7 & -49 \end{array}\right) \begin{array}{c} I \\ II \\ 4 \times \mathrm{III} + 3 \times \mathrm{II} \\ 2 \times \mathrm{IV} - 3 \times \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 3 & 0 & 51 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 84 \\ 0 & 0 & 7 & -23 & -62 \end{array}\right).$$

Обнуляем элементы третьего столбца:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 3 & 0 & 51 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 84 \\ 0 & 0 & 7 & -23 & -62 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ 3 \times \mathrm{IV} + 7 \times \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 3 & 0 & 51 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 134 & 402 \end{array}\right).$$

Разделив последнюю строку на 134, получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 3 & 0 & 51 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 134 & 402 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV}/134 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 3 & 0 & 51 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Обнуляем четвертый столбец:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 3 & 0 & 51 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} - 3 \times \mathrm{IV} \\ \mathrm{III} - 29 \times \mathrm{IV} \\ IV \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 3 & 0 & 51 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Разделим третью строку на (-3):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 3 & 0 & 51 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III}/(-3) \\ \mathrm{IV} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 3 & 0 & 51 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Обнуляем третий столбец:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 3 & 0 & 51 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} - 3 \times \mathrm{III} \\ \mathrm{II} + \mathrm{III} \\ \mathrm{III} \\ IV \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Разделим вторую строку на 4:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}/4 \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Обнулим второй столбец:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -10 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} + 10 \times \mathrm{II} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Выпишем решения системы:

$$\begin{cases} x_1 = -2; \\ x_2 = -5; \\ x_3 = 1; \\ x_4 = 3. \end{cases}$$

Если мы имеем частный случай $n \times n$-системы линейных уравнений $A \times X = B$, такой что $rang(A) = rang(A|B) = n$, то единственное решение X представимо в виде

$X = A^{-1} \times B$.

Применяя алгоритм нахождения обратной матрицы A^{-1}, описанный выше, получим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = [A^{-1}B] = \frac{1}{\det A} \times \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Для нахождения решения неоднородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей существует метод **Крамара**, который удобен для решения систем небольшого размера. Рассмотрим его на примере 3×3-системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_1 \end{cases}$$

Матрица системы A и вектор значений B имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Значения неизвестных x_1, x_2, x_3 вычисляются по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta x_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Крамара

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Матрица системы *A* и вектор значений *B* имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2^+ & 1^- & 3^+ \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-4-2) - 1(2-3) + 3\big(2-(-6)\big) = 13.$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 9^+ & 1^- & 3^+ \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 9(-4-2) - 1(-4-7) + 3\big(-4-(-14)\big) = -13.$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2^+ & 9^- & 3^+ \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-4-7) - 9(2-3) + 3\big(7-(-6)\big) = 26.$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2^+ & 1^- & 9^+ \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-14-(-4)) - 1(7-(-6)) + 9\big(2-(-6)\big) = 39.$$

$$x_1 = \frac{-13}{13} = 1, \quad x_2 = \frac{26}{13} = 2, \quad x_3 = \frac{39}{13} = 3.$$

Тема 4. Основные понятия теории графов

Пусть задано некоторое непустое множество

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\},$$

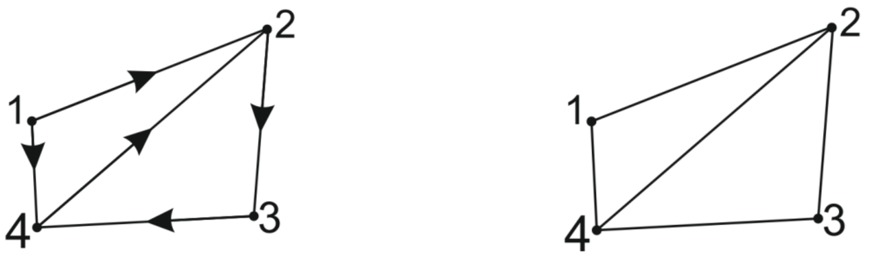
и множество пар различных элементов из V

$$E = \{(v_i, v_j): v_i \in V, v_j \in V, i \in I, j \in J\}.$$

Графом называется пара (*V*, *E*), состоящая из множества *V*, элементы которого называются вершинами графа и множества *E*, элементы которого называются дугами (ребрами) графа. Другими словами граф - это конечное множество объектов или элементов и связей между этими элементами. Объекты или элементы представляют собой вершины графа, а связи между ними дуги (ребра) графа.

В качестве примеров графов можно привести следующие: а) Люди - вершины графа, ребрами связаны те из них, которые знакомы друг с другом. б) Страны - вершины графа, ребрами связаны страны, имеющие общую границу. в) Вершинами графа являются ученые и языки, если ученый говорит на некотором языке, то ученый и этот язык соединяются ребрами.

Геометрическое представление графа - это изображение на плоскости вершин графа в виде точек плоскости и дуг (ребер), соединяющих соответствующие вершины в виде линий (Рисунок 2).



а) ориентированный граф б) неориентированный граф

Рисунок 2 − Геометрическое представление графа.

Представим графом страны Южной Америки, считая, что две страны, имеющие общий участок границы, связаны (Рисунок 3). Благодаря такому способу изображения оказывается проще понять, сколько и какие у каждой страны соседи, через какие страны нужно проехать, чтобы попасть из одной страны в другую и т.д.

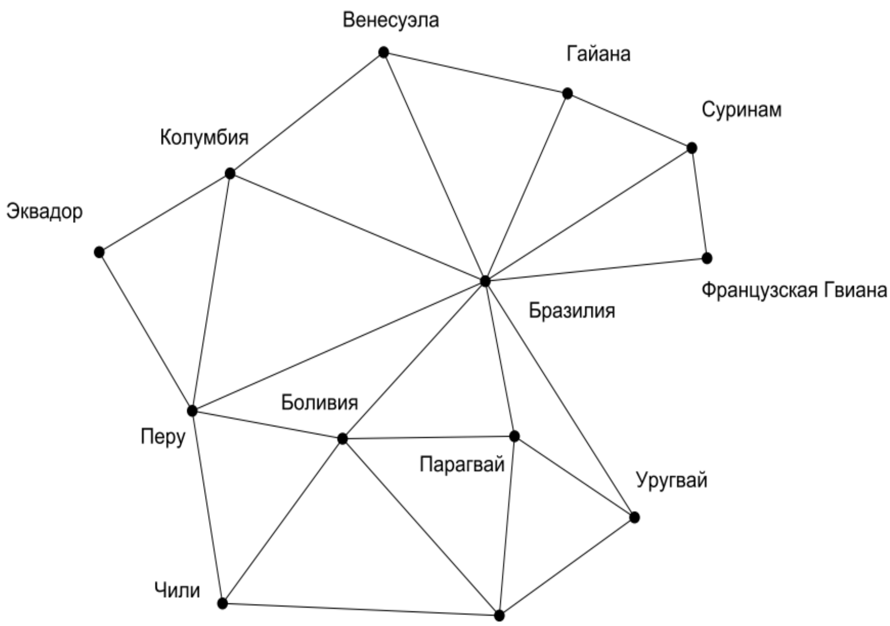


Рисунок 3 − Страны Южной Америки, имеющие общую границу.

Ориентированным называется граф, вершины которого соединены, ориентировано - дугами, изображающимися на схеме ориентированными линиями со стрелкой (рис 1.2а)

Неориентированным называется граф, вершины которого соединены, не ориентировано - ребрами, изображающимися на схеме линиями без указания направлений (рис 1.2б). То есть наличие соединения (v_i, v_j), означает и наличие соединения (v_j, v_i).

Пример 1. V={1,2,3,4}, E={(l, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 4), (4, 2)}.

Смежными называются две вершины графа соединённые дугой (ребром). Вершины между которыми нет соединения называются **несмежными.**

Изолированной называется вершина не соединенная не с одной из вершин графа. Вершина соединенная лишь с одной из вершин графа называется **висячей**.

Вершины v_i, v_j дуги (ребра) (v_i, v_j) называются **концевыми**. Дуга (ребро), вершины которого совпадают, называется **петлей**.

Вершина и дуга (ребро) **инцидентны**, если вершина является для дуги (ребра) концевой вершиной.

Степенью вершины v_i для неориентированного графа (V, E), называется количество ребер инцидентных данной вершине. Для графа на рисунке 1б) степень вершины 1 равна 2, степень вершины 4 равна 3. Вершина v_i является *изолированной*, если ее степень равна 0.

Четной называется вершина, степень которой - четное число, в противном случае вершина называется **нечетной**.

Теорема о сумме степеней вершин графа. Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству всех ребер.

Доказательство. Степень вершины − это количество концов ребер, сходящихся в этой вершине. Поэтому сумма степеней всех вершин графа равна количеству всех концов ребер, которые есть в графе. Но у каждого ребра ровно два конца, значит общее количество ребер в два раза меньше количества концов всех ребер, откуда и получаем утверждение теоремы. Поскольку удвоенное количество ребер − четное число, то сумма степеней всех вершин любого графа должна также являться четным числом.

Теорем о числе нечетных вершин графа. Число нечетных вершин любого графа четно.

Доказательство. Если бы нечетных вершин в графе было бы нечетное число, то сумма степеней всех нечетных вершин выражалась бы нечетным числом. А сумма степеней любого количества четных вершин выражается четным числом. Поэтому сумма степеней всех вершин графа будет нечетным числом, что противоречит предыдущему замечанию.

Полным графом называется граф, у которого каждая пара вершин соединена дугой (Рисунок3).

Поскольку граф состоит из двух множеств (вершины и ребра), то различные операции над множествами естественным образом порождают соответствующие операции над графами.

Объединение двух графов (V_1, E_1) и (V_2, E_2) определяется как граф (V, E), у которого $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$.

Пересечение двух графов (V_1, E_1) и (V_2, E_2) определяется как граф (V, E), у которого $V = V_1 \cap V_2$, $E = E_1 \cap E_2$.

Дополнением графа (V, E) называется граф (V, E^*), такой, что граф (V, $E \cup E^*$) является полным (Рисунок 4).

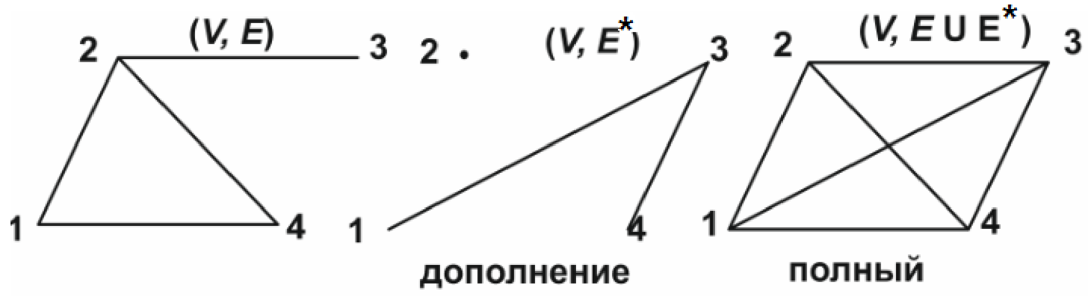


Рисунок 4 − Граф, дополнение, полный граф

Направленным путем длины n называется последовательность вершин $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{n+1}}$, в которой каждые две соседние вершины $v_{i_k}, v_{i_{k+1}}$ соединены дугой $(v_{i_k}, v_{i_{k+1}})$. Первую вершину пути называют **начальной вершиной,** последнюю **– конечной.**

Контуром называется направленный путь, начальная и конечная вершина которого совпадают.

Цепью длины n называется последовательность вершин $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{n+1}}$, в которой каждые две соседние вершины $v_{i_k}, v_{i_{k+1}}$ соединены ребром $(v_{i_k}, v_{i_{k+1}})$. Первая и последняя вершина пути называются концевыми**.**

Циклом называется цепь концевые вершины, которой совпадают.

Связным называется граф, две любые вершины которого, соединены по крайней мере одним путем (цепью). В противном случае граф называется **несвязным.**

Подграфом графа (V, E) называется граф (V^*, E^*), такой что $V^* \subseteq V$, $E^* \subseteq V$.

Компонента связности графа − максимальный связный подграф графа.

Мостом графа называется ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности.

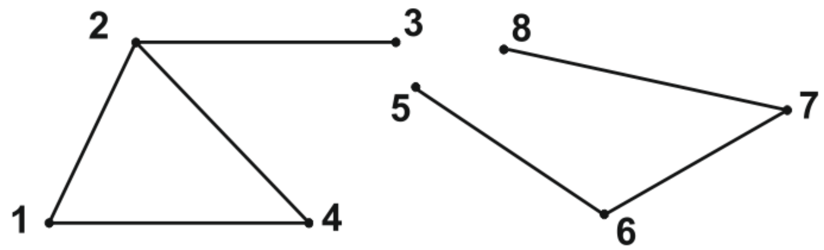


Рисунок 5 − Граф с двумя компонентами связности

Теорема о мосте. Ребро является мостом тогда и только тогда, когда оно не принадлежит не одному циклу.

Доказательство. Достаточно провести для связного графа. Если ребро (v_i, v_j) принадлежит циклу, то вершины v_i, v_j связаны цепью, не содержащей этого ребра. Этой цепью можно заменить все вхождения ребра (v_i, v_j) в цепи. Следовательно, удаление ребра (v_i, v_j) не нарушает связанности вершин.

Обратно, если после удаления ребра (v_i, v_j) получается связный граф, то в нём существуют цепь, не содержащая ребра (v_i, v_j), что значит, что в исходном графе это ребро принадлежит простому циклу.

Эйлерова цепь – это цепь графа, проходящая через каждое ребро графа ровно по одному разу. Аналогично определяется **Эйлеров цикл.**

Теорема об Эйлеровом цикле и Эйлеровой цепи. В связном (неориентированном) графе существует Эйлеров цикл (соответственно, Эйлерова цепь), тогда и только тогда, когда в нем нет вершин (соответственно 2 вершины) нечетной степени.

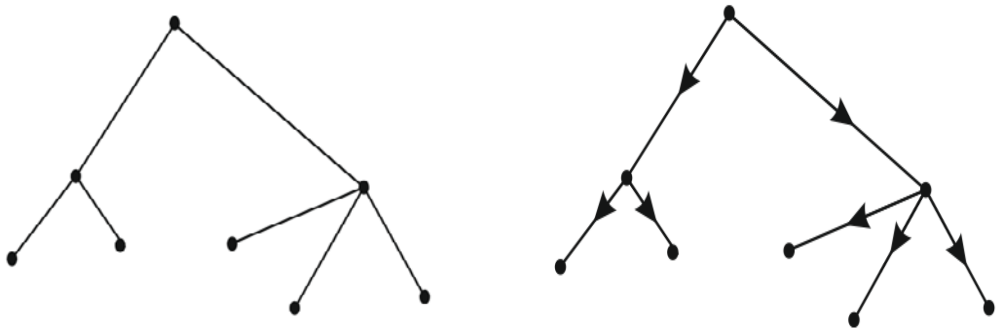
Доказательство. Проведем доказательство для Эйлеровой цепи:

1. Эйлерова цепь, проходит каждую промежуточную вершину, используя дна инцидентных ей ребра, следовательно степени всех вершин, кроме начала и конца, четны. Аналогично для цикла.

2. Рассмотрим в графе цепь между двумя вершинами нечетной степени. Удалим ее. Граф, возможно, распадется на компоненты связности, в каждой из которых степени всех вершин будут четными, а значит, по индукционному предположению в каждой из компонент будут существовать Эйлеровы циклы. Будем двигаться в исходном графе по удаленной цепи. Каждый раз, встречая вершину из очередной не обойденной компоненты, будем обходить ее по Эйлеровому циклу этой компоненты, и продолжать движение по пути.

Деревом называется неориентированный связный граф без циклов (Рисунок 6*а*).

Ориентированный граф называется **деревом**, если он связен и не имеет циклов и единственный путь между вершиной, называемой корнем дерева, и любой другой вершиной графа является направленным путем с началом (концом) в корне дерева (Рисунок 6*б*).



а) неориентированное б) ориентированное

Рисунок 6. − Дерево

Покрывающим деревом для некоторого графа (V, E) называется дерево (V, E_t), содержащее все вершины графа (V, E) (Рисунок 1.7).

Рисунок 7 − Граф и два покрывающих дерева

Остов (каркас) связного графа - дерево, содержащее все вершины графа. Определяется неоднозначно.

Циклический ранг графа - это число $\nu = m - n + c$, где n - число вершин, m - число ребер, c - число компонент связности графа.

Теорема о цикломатическом ранге графа. Число ребер неориентированного графа, которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно цикломатическому рангу графа.

Матрицей смежности графа называется матрица А размерности $n\times n$, где n – число вершин графа, каждый элемент которой a_{ij}=1, если вершины v_i, v_j соединены дугой (ребром) (v_i, v_j) и a_{ij}=0 в противном случае. Н рисунке 7а изображена матрица ориентированного графа из примера 1, на рисунке 7б – матрица неориентированного графа.

$$\mathrm{A}_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а) матрица смежности графа, изображенного на Рисунке 6а

$$\mathrm{A}_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

б) матрица смежности графа, изображенного на Рисунке 6б

Рисунок 8 − Матрица смежности

Матрица инциденций B графа (V, E) с n - числом вершин, m - числом дуг – это матрица размерности $n \times m$, где каждой i-*ой* строке поставлена в соответствие вершина графа v_i и каждому j-ому столбцу поставлена в соответствие дуга графа e_j, а элемент b_{ij} = - 1, если в вершину заходит дуга, b_{ij} = 1 если из вершины v_i исходит дуга e_j, и равен 0, если дуга e_j и вершина v_i не являются инцидентными.

Вершина v_j, называется **достижимой** из вершины v_i, если существует направленный путь (цепь) из вершины v_i в вершину v_j.

Матрицей достижимости R называется матрица, размерности $n \times n$, где n – число вершин графа, каждый элемент которой r_{ij}=1, если вершина v_j достижима из вершины v_i, и r_{ij}=0 в противном случае, причем вершина v_i считается достижимой из вершины v_i посредством пути длины 0.

$$R_{4\times4} = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,1 \end{pmatrix} \qquad R_{4\times4} = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \end{pmatrix}$$

а) матрица достижимости графа на Рисунке 6а

а) матрица достижимости графа на Рисунке 6б

Рисунок 9 − Матрица достижимости

Обозначим через A^k матрицу достижимости с использованием пути длины k. Таким образом матрица смежности А представляет из себя матрицу достижимости с использованием пути длины 1, а единичная матрица Е – матрицу достижимости с использованием пути длины 0. Для графа из **Примера 1** матрицы A^k будут иметь следующий вид:

$$A^0 = E = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}, \qquad A^1 = A = \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 01\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^k равна матрице $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k}$, в которой все элементы большие 1, заменены на 1. Таким образом, матрицу достижимости R для графа с n вершинами можно вычислить найдя сумму матриц E+ A^0+ A^1+ A^2+…+A^{n-1}, и заменив все элементы результирующей матрицы большие 1 на 1.

Второй способ построения матрицы достижимости R является более простым, однако отсутствие вычисления промежуточных матриц A^k не позволяет восстановить путь из начальной вершины в конечную. Алгоритм построения имеет следующий вид:

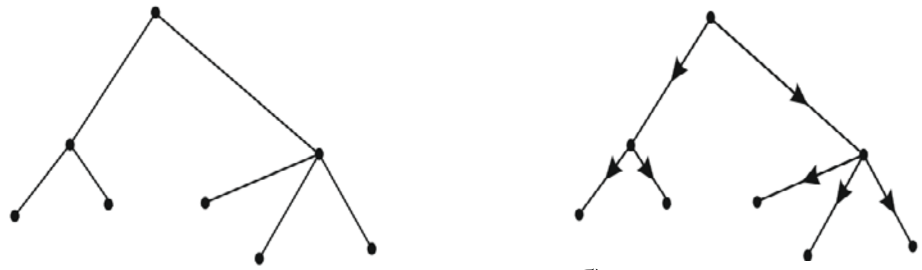
В матрицу R переписываем первую строку матрицы A. Отмечаем элемент первой строки матрицы R отличный от 0, например $r_{1k}=1$. Выбираем k-ую строку матрицы А и дополняем первую строку матрицы R элементами этой строки.

Отмечем любой неотмеченный элемент в первой строке матрицы R и возвращаемся к пункту 2. Процесс продолжаем до тех пор, пока не останется неотмеченных элементов в первой строке матрицы R или пока вся строка не будет заполнена единицами. Далее аналогично строим все последующие строки.

Тема 5. Задачи оптимизации на графах

Неориентированный граф называется **деревом**, если он связен и не имеет циклов (Рисунок 10*а*)

Ориентированный граф называется **деревом**, если он связен и не имеет циклов и единственный путь между вершиной, называемой корнем дерева, и любой другой вершиной графа является направленным путем с началом (концом) в корне дерева (Рисунок 10*б*).



а) неориентированное б) ориентированное

Рисунок 10 − Дерево

Задачами оптимизации на графах являются задачи определения кратчайших (минимальных) путей между вершинами графа, а так же поиск минимальных покрывающих деревьев. При решении таких задач используются взвешенные графы.

Взвешенным называется граф с заданной числовой функцией на вершинах или на дугах (или на тех и других одновременно).

Веса, или значения дуг и вершин в различных задачах имеют различный смысл. Например, в задачах минимизации расстояний на графах значение дуги интерпретируется как протяженность соответствующей структурной связи системы, описываемой данным графом.

Для заданного графа (V, E) значения весов дуг (ребер) графа $p(v_i,\ v_j)$ задаются с помощью **матрицы весов *P***, каждый элемент которой $p_{ij} = p(v_i,\ v_j)$, если вершины v_i, v_j соединены дугой (ребром) (v_i, v_j) и $p_{ij} = \infty$ в противном случае

Алгоритм построения покрывающего дерева.

I. Выберем одну из вершин графа (V, E), например v_1. Выбираем ребро (дугу) (v_1, v_{j^*}) соединяющее дерево (V_1, E_1), $V_1 = \{v_1\}$ и $E_1=\emptyset$, с одной из вершин

$V_2 = V \backslash \{v_1\}$ из числа ребер (дуг) инцидентных вершине v_1 с минимальным значением веса

$$p_{1j^*} = \min_{v_j \in V_2} p(v_1, v_j)$$

II. Добавляем вершину v_{j^*} в множество вершин V_1: $V_1 = V_1 \cup \{v_{j^*}\}$, и исключаем ее из множества V_2: $V_2 = V_2 / \{v_{j^*}\}$. Добавляем ребро (дугу) (v_1, v_{j^*}) в множество E_1: $E_1 = E_1 \cup (v_1, v_{j^*})$.

III. Выбираем ребро (дугу) (v_{i^*}, v_{j^*}) с минимальным значением веса из множества ребер инцидентных множеству вершин V_1:

$$p_{i^* j^*} = \min_{v_i \in V_1,\ v_j \in V_2} p(v_i, v_j)$$

IV. Добавляем вершину v_{j^*} в множество вершин V_1: $V_1 = V_1 \cup \{v_{j^*}\}$, и исключаем ее из множества V_2: $V_2 = V_2 / \{v_{j^*}\}$. Добавляем ребро (дугу) (v_{i^*}, v_{j^*}) в множество E_1: $E_1 = E_1 \cup (v_{i^*}, v_{j^*})$.

Для графа с n вершинами шаги III, IV повторяем до тех пор, пока не будет выбрано n-1 ребро.

Минимальным путем из вершины v_s в вершину v_t называется путь значение, которого минимально.

Алгоритм Дейкстры нахождения минимального пути в графе.

В ходе выполнения алгоритма каждой вершине v_j присваивается число q_j равное значению минимального пути от вершины v_s до вершины v_j.

I. Пометить вершину v_s. Положить $q_s = 0$, $q_j = \infty$ ($j \neq s$).

II. Положить $i = s$.

III. Для каждой неотмеченной вершины j вычислить значение $q_j = \min\{ q_i, q_i + p_{ij}\}$.

IV. Проверить условие $q_j < \infty$. Если $q_j = \infty$, процедуру закончить, так как (s-t)-пути в исходном графе не существует. Если $q_j < \infty$, отметить ту из вершин v_j, у которой минимальное значение q_j, и отметить дугу, выбранную на данном шаге.

V. Положить $i = j$.

VI. Проверить условие $i = t$. Если условие выполняется, (s-t)-путь найден. Этот путь состоит из отмеченных дуг и является минимальным. При $j \neq t$ перейти к шагу 3.

Для нахождения минимальных путей графа от некоторой фиксированной вершины до всех остальных вершин, если модифицировать шаг алгоритма следующим образом: проверить, есть ли неотмеченные вершины. Если таких вершин нет, то процесс завершить, если неотмеченные вершины есть то перейти к шагу 3. Таким образом можно построить покрывающее **дерево минимальных путей**.

Сеть − это ориентированный граф, в котором выделены две вершины − **источник s** и **сток t**. Из источника дуги могут лишь выходить, а в сток − лишь входить. Каждой дуге (v_i, v_j) сопоставлено положительное целое число c_{ij} − **пропускная способность дуги**.

Потоком в сети называется функция f , заданная на дугах сети, принимающая целые значения и удовлетворяющая условиям:

1) $0 \le f_{ij} \le c_{ij}$,

2) $\sum_{i:v_i \to v_j} f_{ij} = \sum_{l:v_j \to v_l} f_{jl}$, для любой промежуточной вершины j (то есть, неравной s, t).

Число f_{ij} называется величиной потока по дуге (v_i, v_j).

Задача о максимальном потоке заключается в нахождении потока, величина которого **максимальна**.

Пусть некоторый поток f в сети уже имеется, например, поток с нулевыми значениями на всех дугах. Алгоритм **Форда - Фалкерсона** состоит из двух чередующихся процедур - помечивания вершин и изменения потока.

Помечивание вершин. Вершины снабжаются метками, состоящими из двух элементов. Источник s получает условную метку $(-, \infty)$. Пусть имеется некоторое множество помеченных вершин. Выбираем любую из них и обрабатываем ее. Обработка v_i-ой вершины с меткой (x, ε) состоит в помечивании из вершины v_i смежных непомеченных вершин по следующему правилу:

если $v_i \to v_j$ и $f_{ij} < c_{ij}$, то вершине v_j присваивается метка $(i^+, \min(\varepsilon, c_{ij} - f_{ij}))$;

если $v_i \leftarrow v_j$ и $f_{ji} > 0$, то вершине v_j присваивается метка − $(i^-, \min(\varepsilon, f_{ji}))$.

Затем обрабатывается другая помеченная вершина и так далее. Процесс помечивания заканчивается в двух случаях:

1) Ни одну вершину больше нельзя пометить, но сток не помечен.

Тогда алгоритм останавливается. 2) Сток помечен. Тогда производится изменение потока.

Изменение потока. Пусть сток получил метку (m+, δ). Тогда прибавляем δ к f_{mt} и переходим в вершину v_m. Общий шаг: если мы находимся в вершине v_j с меткой $(i+, x)$, то прибавляем δ к f_{ij} и переходим в v_i. А если метка v_j равна (i^-, x), то вычитаем δ из f_{ij} и переходим в v_i. Заметим, что правило формирования меток таково, что после прибавления δ новое значение потока не превышает пропускной способности дуги, а при вычитании δ не получается отрицательной величины. Продолжаем изменение потока, пока не достигнем источника.

Величина измененного потока на δ > 1 больше, чем у исходного потока. Теперь снова переходим к помечиванию. Схема алгоритма имеет вид:

Поскольку поток увеличивается не меньше, чем на единицу, а величина потока не может превышать пропускной способности, то алгоритм останавливается после конечного числа шагов.

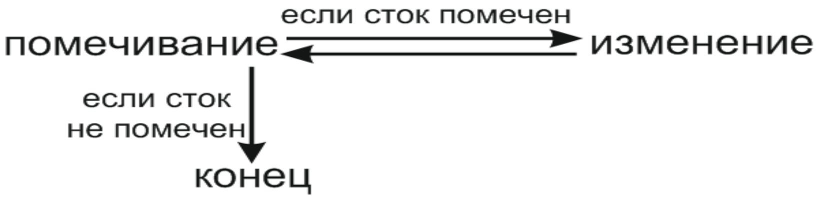


Рисунок 11 − Схема алгоритма Форда - Фалкерсона

Тема 6. Основные понятия теории вероятности

Предметом теории вероятностей является изучение законов, управляющих случайными событиями (явлениями). К основным понятиям теории вероятностей относятся испытание и событие.

Под *испытанием* (*опытом*) понимают реализацию данного комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое-либо *событие*.

Примеры:

1. Брошена монета – испытание. Появление герба или цифры – события.

2. Произведен выстрел по мишени – испытание. Попадание или промах – события.

3. В коробке имеются цветные карандаши. Из коробки наудачу берут один карандаш. Извлечение карандаша из коробки – испытание. Появление карандаша определенного цвета – событие.

Случайным событием называется событие, связанное с данным испытанием, которое при осуществлении этого испытания может произойти, а может и не произойти. Прилагательное «случайное» для краткости часто опускают и говорят просто «событие».

Примеры:

1. Брошена игральная кость (кубик, на гранях которого отмечено от одного до шести очков). Выпадение четырех очков – случайное событие.

2. В коробке имеются белые и черные шары. Из коробки наугад берут два шара. Оба шара белые – случайное событие.

Достоверным событием называется событие, которое в результате данного испытания непременно произойдет.

Пример. Брошена игральная кость. Выпадение не более шести очков – достоверное событие.

Невозможным событием называется событие, которое заведомо не произойдет в результате данного испытания.

Примеры:

1. Брошена игральная кость. Выпадение десяти очков – невозможное событие.

2. Камень брошен вверх. Камень остается висеть в воздухе – невозможное событие.

Случайные события обозначаются большими буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$. Например, событие A – попадание в мишени при стрельбе, событие B – появление герба при бросании монеты. Достоверное событие будем обозначать буквой U, невозможное – V.

Отметим, что всякое случайное событие является следствием очень многих причин. Например, выпадение герба или цифры при бросании монеты зависит от силы, с которой брошена монета, ее формы, сплава и многих других причин. Попадание или промах при стрельбе зависит от расстояния до мишени, веса пули (снаряда), от направления и силы ветра и других случайных причин. В связи с этим невозможно заранее предсказать, произойдет единичное событие или нет. Иначе обстоит дело при изучении многократно повторяющихся событий. Оказывается, что однородные случайные события при многократном повторении подчиняются определенным закономерностям. Изучением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Пусть произведено испытание, в результате которого возможны события A_1, A_2, …, A_n. События A_1, A_2, …, A_n называются *несовместными*, если осуществление одного из них исключает осуществление других.

Примеры:

1. В ящике имеются стандартные и нестандартные детали. Наудачу берут одну деталь. События A_1 – «появилась стандартная деталь» и A_2 – «появилась нестандартная деталь» являются несовместными событиями.

2. Брошена игральная кость. Событие A_1 – «появление двух очков» и событие A_2 – «появление четного числа очков» совместны, так как появление одного из них не исключает появление другого.

События A_1, A_2, …, A_n называются *равновозможными*, если условия испытания обеспечивают одинаковую возможность осуществления каждого из них.

Примеры:

1. Появление того или иного числа очков при бросании игральной кости есть события равновозможные, так как игральная кость изготавливается из однородного материала и имеет строго симметричную форму.

2. Появление герба и появление цифры при бросании симметрической монеты есть события равновозможные.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу событий*, если в результате данного испытания непременно произойдет хотя бы одно из них.

Пример. В коробке имеются три белых шара, перенумерованных цифрами 1, 2, 3, и пять черных шаров, перенумерованных цифрами 1, 2, … , 5. Из коробки наугад берут один шар. События: A_1 – «появление шара с цифрой 1», A_2 – «появление шара с цифрой 2», … , A_5 – «появление шара с цифрой 5» – образуют полную группу.

Важную роль играет *полная группа несовместных событий*, т. е. такая группа событий, что в результате данного испытания непременно произойдет одно и притом только одно событие данной группы.

Пример. При бросании игральной кости события: A_1 – «появление одного очка», A_2 – «появление двух очков», … , A_6 – «появление шести очков» – образуют полную группу несовместных событий.

Два случайных события называются *противоположными*, если одно из них происходит в том и только том случае, когда не происходит другое.

Событие, противоположное событию A, обозначают через $\overline{A}$ (читают «не A»).

Примеры:

1. Попадание и промах при выстреле по мишени – противоположные события. Если A – попадание, то $\overline{A}$ – промах.

2. Появление четного числа очков при бросании игральной кости – событие, противоположное появлению нечетного числа очков.

Очевидно, что противоположные события образуют полную группу событий.

Отметим, что любое случайное событие может быть представлено в виде некоторого множества.

Пример. При бросании игральной кости непременно произойдет одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Каждое из этих событий назовем *элементарным событием*. Все элементарные события A_i (i=1, 2, …, 6) *образуют множество элементарных событий* $A=\{A_1, A_2, \ldots, A_6\}$.

Очевидно, что: 1) событие B – «появление четного числа очков» может быть представлено в виде множества $B = \{A_2, A_4, A_6\}$; 2) событие C – «появление числа очков не большего трех», может быть представлено множеством $C = \{A_1, A_2, A_3\}$; 3) событие D – «появление числа очков, которое делится на 3», может быть представлено множеством $D = \{A_3, A_6\}$ и т. д.

Нетрудно заметить, что множества B, C и D являются подмножествами множества элементарных событий A. Таким образом, любое случайное событие может быть представлено подмножеством множества всех элементарных событий данного испытания.

Операции над событиями

Рассмотрим события: A – «появление трех очков при бросании игральной кости», B – «появление нечетного числа очков при бросании игральной кости».

Очевидно, что если произошло событие A, то непременно произошло и событие B. В этом случае говорят «A влечет за собой B» (или «B является следствием A») и записывают $A \subset B$ (или $B \supset A$).

Если события A и B таковы, что $A \subset B$ и $B \supset A$, то они называются *равными* (*равносильными*), при этом пишут $A = B$.

Пример. Брошена симметричная монета. Событие A – «появление герба», событие B – «непоявление цифры». Очевидно, что $A \subset B$ и $B \subset A$ и, следовательно, $A=B$.

Отметим, что событие A может быть частью события B только в том случае, когда элементарные события, представляющие событие A, принадлежат подмножеству элементарных событий, представляющих событие B.

Пример. В коробке имеются пять белых шаров, перенумерованных от 1 до 5, и семь черных шаров, перенумерованных от 6 до 12. Очевидно, что событие A – «появление шара с номером 8» влечет за собой событие B – «появление черного шара». Поэтому $A \subset B$.

Так как события могут быть представлены в виде подмножеств множества элементарных событий, то действия над событиями выполняются аналогично действиям над множествами.

Суммой, или объединением, двух событий A и B называется событие C, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий A или B (безразлично, какого именно, или обоих, если это возможно).

Символически записывают так: $C=A+B$ или $C=A \cup B$.

Сумма событий интерпретируется как объединение (сумма) множеств (подмножеств множества элементарных событий) – см. Рисунок 12.

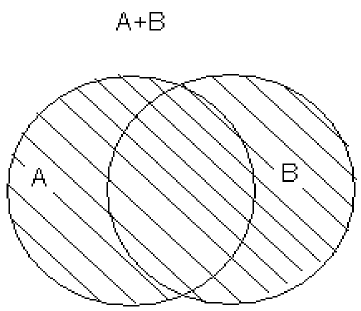


Рисунок 12 − Сумма событий A и B

Суммой, или объединением, нескольких событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие C, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Символическая запись:

$$C=\sum_{i=1}^{n}A_i \text{ или } C=\bigcup_{i=1}^{n}A_i .$$

Пример. Найти сумму событий: A – «появление одного очка при бросании игральной кости» и B – «появление двух очков при бросании игральной кости».

Суммой $A+B$ является событие C – «появление не больше двух очков при бросании игральной кости», поэтому $A+B=C$.

Если события A и B – несовместные, то сумма $A+B$ является событием, состоящим в осуществлении одного из этих событий, безразлично какого (их совместное осуществление невозможно).

Непосредственно из определения суммы событий вытекают следующие свойства сложения:

1) $A+B=B+A$ (коммутативность);

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативность);

3) $A+\overline{A}=U$.

Произведением, или пересечением, двух событий A и B называется событие C, состоящее в одновременном осуществлении A и B.

Символически произведение записывают так:

$$C=AB \text{ или } C=A\cap B.$$

Теоретико-множественная интерпретация произведения событий дана на Рисунке 13.

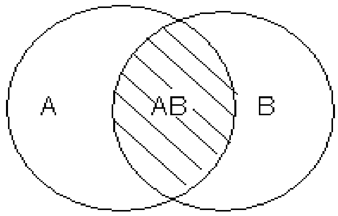


Рисунок 13 − Произведение событий A и B

Произведением, или пересечением, нескольких событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие C, состоящее в одновременном осуществлении всех событий. Символически представляется следующим образом:

$$C=\prod_{i=1}^{n}A_i \text{ или } C=\bigcap_{i=1}^{n}A_i .$$

Пример. Найти произведение событий A – «студенту попался экзаменационный билет с четным номером» и B – «студенту попался экзаменационный билет с номером, кратным пяти».

Решение. Произведением AB является событие C – «студенту попался экзаменационный билет с номером, кратным десяти», поэтому $AB=C$.

Если события A и B – несовместные, то $AB=V$, т. е. произведение AB – невозможное событие.

Можно показать, что для умножения событий имеют место свойства:

1) $AB=BA$ (коммутативность);
2) $A(BC)=(AB)C$ (ассоциативность);
3) $A(B+C)=AB+AC$ (дистрибутивность);
4) $A\overline{A}=V$.

Понятие вероятности

Известно, что случайное событие в результате испытания может произойти, а может и не произойти. Однако объективная возможность различных событий в одном и том же испытании может, вообще говоря, быть различной.

Рассмотрим пример. В урне 12 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 3 из них белые и 9 черные. Из урны наудачу вынимают один шар. Очевидно, что возможность появления черного шара «больше», чем возможность появления белого шара. В этом случае говорят: «вероятность появления черного шара больше вероятности появления белого шара».

Под **вероятностью события** понимают численную меру объективной возможности появления этого события.

Поставим своей задачей научиться находить эту численную меру объективной возможности события, т. е. находить вероятность события, причем ограничимся лишь вычислением вероятностей в классической модели.

Под **классической моделью** понимают такое множество элементарных событий, которое образует полную группу несовместных событий и все элементарные события равновозможны.

Например, при бросании игральной кости множество элементарных событий: A_1 – «появление одного очка», A_2 – «появление двух очков», … , A_6 – «появление шести очков» – образуют классическую модель. Вероятность каждого из этих элементарных событий A_i (i = 1, 2, …, 6) считаем равной 1/6.

Рассмотрим теперь события: A – «появление четного числа очков», B – «появление не больше двух очков». Нетрудно заметить, что событие A произойдет, если произойдет по крайней мере одно из событий A_2, A_4, A_6. В этом случае говорят, что событию A благоприятствуют события A_2, A_4, A_6. Очевидно, что событию B благоприятствуют события A_1 и A_2.

То элементарное событие, при котором интересующее нас событие наступит, называется *благоприятствующим* этому событию.

При бросании игральной кости имеем 6 элементарных событий, из них 3 благоприятствуют событию A. Вероятность события A считаем равной 3/6=1/2. Аналогично, вероятность события B равна 2/6=1/3.

Кратко это записывается так:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}.$$

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа m элементарных событий, благоприятствующих этому событию, к общему числу n равновозможных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Это определение носит название **классического** определения вероятности.

Из (1) следует, что $P(U)=1$ и $P(V)=0$, т. е. вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного события равна нулю. Если $A \neq U$ и $A \neq V$, то $0<P(A)<1$.

Итак, вероятность любого события A удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Рассмотрим ряд примеров непосредственного вычисления вероятностей.

Пример 1. В коробке 3 белых и 9 черных шаров. Из коробки наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется черным (событие A)?

Решение. Имеем $m = 9$, $n = 12$, и поэтому $P(A) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Пусть задано пространство элементарных событий E и каждому событию $A \subset E$ поставлено в соответствие единственное число $P(A)$ такое, что:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$,

2) для каждой пары несовместных событий A, $B \subset E$ имеет место равенство: $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$,

3) $P(E)=1$.

Тогда говорят, что на событиях в множестве E задана **вероятность**, а число $P(A)$ называется **вероятностью события А**. Такое определение вероятности называется **аксиоматическим.**

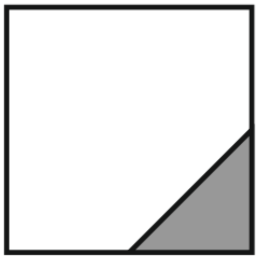
В определении **статистической вероятности** используется понятие относительной частоты события A. Относительной частотой W события A называют отношение числа наблюдений m, в которых наблюдается A, к числу всех наблюдений n:

$$W = \frac{m}{n}.$$

Преимущество статистического способа определения вероятности состоит в том, что он опирается на реальный эксперимент. Недостаток – необходимость выполнения большого числа опытов для установления более точного значения относительной частоты, что очень часто связано с материальными затратами.

Недостаток классического определения вероятности состоит в том, что оно не применимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Для преодоления этого в теории вероятности вводят понятие **геометрической вероятности –** вероятности попадания точки в некоторую область $d \in D$, которая определяется как отношение меры области $mes(d)$ к мере области $mes(D)$:

$$P = \frac{mes(d)}{mes(D)}.$$



Пример 1. В квадрат со стороной $2a$ наугад брошена точка, найти вероятность того, что она попадет в правый нижний угол квадрата, представляющий из себя треугольник, два катета которого являются половинами сторон квадрата.

Решение. Площадь квадрата равна $4a^2$. Сторона искомого треугольника равна половине стороны квадрата, то есть a, следовательно его площадь треугольника равна $0.5a^2$. Чтобы найти вероятность попадания точки в треугольник необходимо его площадь разделить на площадь квадрата:

$P= 0.5a^2/4a^2=0.125$.

Элементы комбинаторики

При решении задач теории вероятности нередко возникает необходимость осуществлять перебор возможных вариантов или хотя бы подсчитывать их количество. Таково рода задачи называют *комбинаторными.*

Комбинаторика (комбинаторный анализ) – раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества и отношения на них. Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова «combina», что в переводе на русский язык означает – «сочетать», «соединять».

Знание комбинаторики необходимо представителям самых разных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, информатикам, лингвистам, культурологам и другим специалистам. Комбинаторные методы лежат в основе решения многих задач теории вероятностей и ее приложений.

Термин «комбинаторика» был введен в математический обиход известным немецким ученым Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1.07.1646 – 14.11.1716). В 1666 г. он опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве», в котором ввел специальные символы, термины для подмножеств и операций над ними, нашел все k–сочетания из n элементов и вывел свойства сочетаний.

Комбинаторика рассматривает задачи о перечислении или подсчете количества различных соединений (например, перестановок), образуемых элементами конечных множеств, на которые могут накладываться определенные ограничения, такие как различимость или неразличимость элементов, возможность повторения одинаковых элементов и т. п.

Особая примета комбинаторных задач – вопрос, который можно сформулировать таким образом, что он начинался бы словами:

Сколькими способами …?

Сколько вариантов …?

Для того чтобы решить задачу по комбинаторике, необходимо сначала понять ее смысл, то есть представить мысленно процесс или действие, описанное в задаче. Нужно четко определить тип соединений в задаче, а для этого надо, составив несколько различных комбинаций, проверить, повторяются ли элементы, меняется ли их состав, важен ли порядок элементов.

Если же комбинаторная задача содержит ряд ограничений, налагающихся на соединения, то нужно понять, как влияют или не влияют эти ограничения на соединения. В том случае, если трудно сразу определить какие-либо важные моменты задачи, то неплохо было бы попытаться разобраться в более легкой задаче, например в той, в которой не учитываются ограничения. Если ограничения есть в исходной задаче или же в задаче, в которой рассматривается меньшее количество элементов, тогда проще будет понять принцип образования выборок.

Когда комбинаторная задача состоит из различных комбинаций элементарных задач, то нужно просто разбить задачу на подзадачи.

Количество соединений, образованных несколькими манипуляциями над множеством, подсчитывается согласно правилам *сложения* и *умножения*.

Правило сложения. Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, то выбор «либо A, либо B» можно осуществить $(m+n)$ способами.

При использовании правила сложения надо следить, чтобы ни один из способов выбора объекта A не совпадал с каким-либо способом выбора объекта B. Если такие совпадения есть, правило сложения утрачивает силу, и мы получаем лишь $(m + n - k)$ способов выбора, где k – число совпадений.

Пример. Сколько чисел в первой сотне, делящихся на два или на три?

Решение. Каждое второе число в натуральном ряде делится на 2, каждое третье – на 3. Поэтому в первой сотне есть 50 чисел, делящихся на 2, и 33 числа, делящихся на 3. Но среди первых и вторых имеются числа, делящиеся и на 2, и на 3, т. е. делящиеся на 6. Если 100 разделить на 6, то неполное частное будет равняться 16, т. е. 16 чисел в первой сотне делится на 6. Итак, количество чисел в первой сотне, делящихся на 2 или на 3, равно 50+33-16=67.

Правило умножения. Если объект A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор пары (A, B) в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами. При этом число способов выбора второго элемента не зависит от того, как именно выбран первый элемент.

Правило умножения справедливо для выбора любого конечного числа объектов. В общем случае его можно сформулировать так:

Если объект A_1 может быть выбран n_1 различными способами, A_2 – n_2 различными способами и т. д., A_k – n_k различными способами, то k объектов A_1, $A_2,\ldots, A_k$ в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Примеры:

1. В студенческой группе 25 человек. Сколькими способами в этой группе можно выбрать старосту и профорга.

Решение. Старостой может любой из 25 студентов. После выбора старосты на роль профорга могут претендовать 24 оставшихся студентов. Таким образом, всего есть $25 \cdot 24=600$ различных вариантов выбора.

2. В саквояжах часто применяют секретные замки, которые открываются, когда набран шифр. В замке имеется несколько дисков. Пусть на каждом диске имеется 12 букв, а секретное слово-шифр состоит из 4 букв. Вычислите, сколько существует вариантов для набора шифра.

Решение. Для набора первой буквы слова существует 12 способов и набор буквы на следующем диске не зависит от того, какая буква была набрана на предыдущем диске. Поэтому, применяя правило умножения, получаем $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12= 20736$ вариантов набора шифра.

Перестановки

Для формулировки и решения комбинаторных задач используют различные модели комбинаторных соединений. *Комбинаторные соединения* – это комбинации из каких-либо элементов. В комбинаторных соединениях может играть существенную роль или порядок элементов, или их состав, или то и другое. В зависимости от этого комбинаторные соединения имеют определенное название. Основными типами комбинаторных соединений являются: *перестановки*, *размещения* и *сочетания*.

Возьмем n различных элементов: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Будем переставлять их всеми возможными способами, сохраняя их количество и меняя лишь порядок их расположения. Каждая из полученных таким образом комбинаций называется *перестановкой.* Общее количество перестановок из n элементов обозначается P_n . Это число равно произведению всех целых чисел от 1 до n:

$P_n=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n=n!$.

Символы $n!$ (читаются *n-факториал*) – сокращенная запись произведения: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Эта функция определяется для значения n, равного 0 и 1, следующим образом: $0! = 1$; $1! = 1$.

Пример 1. Найти число перестановок из трех элементов: a, b, c.

Решение. В соответствии с приведенной выше формулой P_n получим, что P_3=1·2·3=6. Действительно, мы имеем 6 перестановок: *abc, acb, bac, bca, cab, cba*.

Пример 2. Сколькими способами можно расставить на пятиместной полке пять различных книг?

Решение. На первое место можно поставить любую из пяти книг, на второе место – любую из четырех оставшихся книг, на третье – любую из трех оставшихся книг и т. д. Таким образом, всего получается 5·4·3·2·1=120 способов.

Перестановки с повторениями – комбинаторные соединения, в которых среди образующих элементов имеются одинаковые. В таких соединениях участвуют несколько типов объектов, причем имеется некоторое количество объектов каждого типа. Поэтому в выборках встречаются одинаковые элементы.

Рассмотрим перестановку

$$\underbrace{a,a,...,a}_{n_1};\underbrace{b,b,...,b}_{n_2};...;\underbrace{z,z,...,z}_{n_k}.$$

Элементы 1-го типа можно переставлять $n_1!$ способами. Поскольку эти элементы одинаковые, получим ту же перестановку из n элементов. Так же ничего не изменяют $n_2!$ перестановок элементов 2-го типа, … , $n_k!$ перестановок k–го типа. Перестановки элементов 1-го типа, 2-го типа и т. д. можно выполнять независимо друг от друга. Поэтому одинаковые элементы любой перестановки из n элементов можно переставлять $n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_k!$ способами так, что она не изменяется. Таким образом, совокупность всех перестановок содержит $n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_k!$ одинаковых перестановок. Отсюда получаем, что количество различных перестановок с повторениями определяется следующей формулой:

$$P_n(n_1,n_2,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Пример. Сколько перестановок можно образовать из букв слова «задача».

Решение. Если бы в слове все буквы были различными, то число всех перестановок равнялось бы 6!=720. Но в слове «задача» содержится три одинаковых буквы «а». Поэтому число всех перестановок из букв слова «задача» равно $\frac{6!}{3!}=120$.

Размещения и сочетания

Будем составлять группы из m различных элементов, взятых из множества, состоящего из n элементов, располагая эти m взятых элементов в различном порядке. Полученные комбинации называются *размещениями* из n элементов по m.

Их общее количество обозначается A_n^m. Найдем, чему равняется A_n^m.

Первый элемент для размещения можно выбрать n различными способами. Для размещения второго элемента остается n-1 возможность и т. д. Последний m-й элемент размещают после извлечения (m–1)-го элемента, т. е. из [n–(m–1)] оставшихся элементов. Применяя правило умножения, получим, что число размещений из n элементов по m равно

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(m-1)].$$

Полученную формулу иногда записывают в следующем, более кратком виде

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Очевидно, что из этой формулы можно получить предыдущую формулу делением ее числителя и знаменателя на величину (n-m)!

Пример. Найти число размещений из четырех элементов a, b, c, d по два.

Решение. В соответствии с формулой получим: $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Вот эти размещения: $ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc$.

Будем составлять группы из m различных элементов, взятых из множества, состоящего из n элементов, не принимая во внимание порядок расположения этих m элементов. Тогда мы получим *сочетания* из n элементов по m.

Их общее количество обозначается C_n^m. Вычислим это количество.

Из каждой неупорядоченной выборки, состоящей из различных элементов, можно получить m! упорядоченных выборок. По правилу умножения число всех упорядоченных выборок из n по m равно

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = C_n^m = m!.$$

Таким образом,

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}.$$

Заметим, что можно составить только одно сочетание из n элементов по n, которое содержит все n элементов. Формула числа сочетаний дает это значение, если только принять, что 0!=1. Ранее мы отмечали, что эта формула есть определение 0!.

В соответствии с этим определением получим:

$$C_n^n = C_n^0 = 1.$$

Если в формуле для вычисления C_n^m числитель и знаменатель умножить на (n-m)!, то получим другую формулу

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Из этой формулы ясно, что

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Общее число сочетаний можно вычислить, пользуясь и другим выражением:

$$C_n^m = A_n^m / P_m.$$

Пример. Найдите число сочетаний из пяти элементов: *a, b, c, d, e* по три.

Решение.

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10.$$

Эти сочетания: *abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.*

Сочетания с повторениями – комбинаторные соединения из n элементов по m, составленные из этих элементов без учета порядка с возможностью многократного повторения предметов. Найти количество сочетаний с повторениями можно по формуле

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

Покажем, что эта формула является верной. Каждой неупорядоченной выборке с возвращением из n элементов по m можно поставить в соответствие последовательность из n-1 нулей и m единиц, т. е. последовательность длиной n+m-1. Верно и обратное утверждение: каждая последовательность из n-1 нулей и m единиц однозначно определяет такую выборку. Между выборками и последовательностями имеется взаимно однозначное соответствие. Поэтому число неупорядоченных выборок без возвращения из n элементов по m равно числу таких последовательностей, что, в свою очередь, равно числу способов выбора m мест для единиц или, что то же самое, n-1 мест для нулей из общего числа n+m-1 мест. Это и требовалось доказать.

Пример. Подсчитайте количество костей в домино.

Решение. Каждую кость домино можно рассматривать как выборку, образованную из семи элементов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, содержащую два элемента. Эти выборки являются выборками с возвращением (среди костей домино есть дубли 0 : 0, 1 : 1 и т. д.) и неупорядоченные (кости 0 : 1 и 1 : 0 неразличимы). Поэтому для подсчета числа костей в домино можно применить формулу числа сочетаний с повторениями

$$\tilde{C}_7^2 = C_{7+2-1}^2 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Бином Ньютона

Бином Ньютона – это формула, представляющая выражение $(a+b)^n$ при положительном целом n в виде многочлена:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Числа $C_n^1, C_n^2, C_n^3, ..., C_n^{n-1}$ называются биномиальными коэффициентами. Заметим, что сумма показателей степеней для a и b постоянна и равна n.

Пример. Запишите формулу суммы кубов двух чисел.

Решение. Запишем формулу бинома Ньютона для n, равного 3, и вычислим биномиальные коэффициенты:

$$(a+b)^3 = a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + b^3 = a^3 + \frac{3!}{1!\cdot 2!}a^2 b + \frac{3!}{2!\cdot 1!}ab^2 + b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

Биномиальные коэффициенты можно вычислить, применяя только сложение, если пользоваться следующей схемой. В верхней строке пишем две единицы. Все последующие строки начинаются и заканчиваются единицей. Промежуточные числа в этих строках получаются суммированием соседних чисел из предыдущей строки. Эта схема называется *треугольником Паскаля*.

Треугольник Паскаля

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
....

Первая строка в этой таблице содержит биномиальные коэффициенты для n = 1; вторая – для n = 2; третья – для n = 3 и т. д. Поэтому, если необходимо, например, разложить выражение $(a+b)^7$, мы можем получить результат моментально, используя треугольник Паскаля:

$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$.

Биноминальные коэффициенты обладают следующими свойствами:

1. Сумма коэффициентов разложения $(a+b)^n$ равна 2^n .

Для доказательства достаточно положить a=b=1. Тогда в правой части разложения бинома Ньютона мы будем иметь сумму биномиальных коэффициентов, а слева: $(1+1)^n=2^n$.

2. Коэффициенты членов, равноудаленных от концов разложения, равны. Это свойство следует из соотношения:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

3. Сумма коэффициентов четных членов разложения равна сумме коэффициентов нечетных членов разложения; каждая из них равна 2^{n-1}.

Для доказательства воспользуемся биномом: $(1–1)^n = 0^n = 0$. Здесь четные члены имеют знак «+», а нечетные – «–». Так как в результате разложения получается 0, то, следовательно, суммы их биномиальных коэффициентов равны между собой, поэтому каждая из них равна: $2^n: 2=2^{n-1}$, что и требовалось доказать.

Формулу бинома Ньютона можно использовать для приближенного вычисления степеней. Положив в формуле бинома Ньютона a=1, b=x, получим

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n.$$

Если значение x мало, то значения x^2, x^3, …, x^n тем более малы. Поэтому если в последнем равенстве отбросить все слагаемые, начиная с третьего, и учесть, что $C_n^1 = n$, то получим приближенную формулу

$$(1+x)^n \approx 1+nx.$$

При малых значениях x она дает удовлетворительный результат.

Тема 7. Операции над вероятностями

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий A и В равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Доказательство. Пусть n – общее число равновозможных несовместных элементарных событий испытания, в результате которого может произойти одно из событий A или B, m_A – число элементарных событий, благоприятствующих событию A, m_B – число элементарных событий, благоприятствующих событию B. Тогда, так как события A и B несовместны, имеем:

$$P(A+B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B),$$

что и требовалось доказать.

Следствия:

1. Вероятность суммы нескольких событий A_1, A_2, ... , A_n равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Это следствие получается из теоремы 1 применением метода математической индукции.

2. Если события A_1, A_2, ..., A_n несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Это непосредственно следует из формулы пункта 2, так как противоположные события образуют полную группу.

Примеры:

1. Военный летчик получил задание уничтожить два рядом расположенных склада боеприпасов противника. На борту самолета осталась лишь одна бомба. Вероятность попадания в первый склад равна 0,225, во второй – 0,325. В результате детонации любое попадание взрывает оба склада. Какова вероятность того, что склады будут уничтожены?

Решение. События A – «попадание в первый склад» и B – «попадание во второй склад» несовместны, поэтому вероятность попадания хотя бы в один из складов

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}225+0{,}325=0{,}55.$$

2. На заочное отделение университета поступают контрольные работы по математике из городов A, B и C. Вероятность поступления контрольной работы из города A равна 0,6, из города B – 0,1. Найти вероятность того, что очередная контрольная работа поступит из города C.

Решение. События «контрольная работа поступила из города A», «контрольная работа поступила из города B» и «контрольная работа поступила из города C» образуют полную группу, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$0{,}6+0{,}1+p=1 \ \Leftrightarrow\ p=0{,}3.$$

3. Вероятность того, что день будет ясным, $p = 0{,}85$. Найти вероятность q того, что день будет облачным.

Решение. События «день ясный» и «день облачный» противоположные, поэтому

$$p+q=1 \ \Leftrightarrow\ q=1-p=1-0{,}85=0{,}15.$$

Теорема. Если события A и B совместны, то вероятность их суммы выражается формулой

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

т. е. вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения (совместного осуществления).

Доказательство. Пусть m – число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию A, k – число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию B. Допустим, что среди $m+k$ элементарных событий содержится l таких, которые благоприятствуют как событию A, так и событию B. Тогда, если n – общее число равновозможных элементарных событий,

$$P(A)=\frac{m}{n}, \qquad P(B)=\frac{k}{n}, \qquad P(AB)=\frac{l}{n}.$$

Таким образом, событие $A+B$ состоит в том, что произошло или событие A, или событие B, или и то и другое, то ему благоприятствуют $m+k-l$ элементарных событий. Поэтому

$$P(A+B)=\frac{m+k-l}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{l}{n},$$

или

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

что и требовалось доказать.

Пример. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей хотя бы один раз выпадет 6 очков.

Решение. Обозначим события:

A – «выпадение шести очков при бросании первой игральной кости»;

B – «выпадение шести очков при бросании второй игральной кости».

Так как события A и B совместны, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Но $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{6}$ и $P(AB)=\frac{1}{36}$, поэтому

$$P(A+B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}.$$

Умножение

Два события A и B называются **независимыми**, если вероятность одного из них не зависит от того, произошло или не произошло другое.

Пример. Игральная кость брошена два раза. Вероятность появления трех очков в первом испытании (событие A) не зависит от появления или непоявления трех очков во втором испытании (событие B). Аналогично, вероятность появления трех очков во втором испытании не зависит от результата первого испытания. Следовательно, события A и B – независимые.

Теорема. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий, т. е.

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Доказательство. Пусть n_1 – число равновозможных элементарных событий испытания, в результате которого событие A может произойти или не произойти; m_1 – число элементарных событий, благоприятствующих событию A ($m_1 \le n_1$), n_2 – число равновозможных элементарных событий испытания, в результате которого может произойти событие B, m_2 – число элементарных событий, благоприятствующих событию B ($m_2 \le n_2$).

Нетрудно заметить, что общее число элементарных событий испытания, в результате которого может произойти (или не произойти) событие AB, равно $n_1 \cdot n_2$, так как события A и B независимы, то число элементарных событий, благоприятствующих событию AB, равно $m_1 \cdot m_2$. Поэтому

$$P(AB)=\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=P(A)\cdot P(B),$$

что и требовалось доказать.

Если имеем n попарно независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то можно доказать, что

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Пример. Два стрелка стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,9, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что оба стрелка попадут в цель.

Решение. Обозначим события: A – «попадание в цель первым стрелком», B – «попадание в цель вторым стрелком». Так как события A и B независимы, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72.$$

Два события A и B называются **зависимыми** если вероятность одного из них зависит от того, произошло или не произошло другое.

Пример. В ящике имеется 90 стандартных деталей и 10 нестандартных. Из ящика наудачу берут одну за другой две детали. Вероятность появления стандартной детали при первом испытании (событие A) равна

$$P(A)=\frac{90}{100}=0{,}9.$$

Вероятность появления стандартной детали при втором испытании (событие B) зависит от результата первого испытания: если в первом испытании событие A произошло, то

$$P(B)=\frac{90}{99}=\frac{10}{11}.$$

Следовательно, события A и B – зависимые.

Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло, называется **условной вероятностью события A при условии B** и обозначается $P(A \mid B)$.

Пример. В коробке a белых и b черных шаров. Из коробки наудачу последовательно вынимают два шара. Найти вероятность того, что второй шар окажется черным при условии, что первый шар был черным.

Решение. Обозначим события: A – «первый шар черный»; B – «второй шар черный».

Если произошло событие A, то в урне осталось всего a=b–1 черных. Поэтому условная вероятность события B при условии, что произошло событие A, есть:

$$P(B \mid A) = \frac{b-1}{a+b-1}.$$

Для зависимых событий справедлива следующая теорема.

Теорема. Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B \mid A) \Leftrightarrow P(AB) = P(B)\cdot P(A \mid B). \qquad (*)$$

В случае n произвольных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ справедлива формула

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1)\cdot P(A_3 \mid A_1A_2)\underbrace{\cdot \dots \cdot}P(A_n \mid A_1A_2 \dots A_{n-1}),$$

где $P(A_n \mid A_1A_2 \dots A_{n-1})$ – вероятность события A_n, вычисленная при условии, что произошли события $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$.

Примеры:

1. В цехе изготавливаются детали на трех станках. Вероятность изготовления на первом станке равна 0,6. Вероятность появления годной детали на первом станке равна 0,8. Найти вероятность того, что годная деталь изготовлена на первом станке.

Решение. Обозначим события: A – «деталь изготовлена на первом станке», B – «деталь годная».

Имеем: $P(A)$=0,6, $P(B|A)$=0,8. По первой формуле (*) находим:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}48.$$

2. В ящике находится 7 деталей первого сорта, 5 – второго сорта и 3 – третьего. Из ящика последовательно вынимают три детали. Найти вероятность того, что первая наугад вынутая деталь окажется первого сорта (событие A_1), вторая деталь – второго сорта (событие A_2) и третья деталь – третьего сорта (событие A_3).

Решение. Очевидно, что

$$P(A_1) = \frac{7}{15},\ P(A_2 \mid A_1) = \frac{5}{14} \text{ и } P(A_3 \mid A_1A_2) = \frac{3}{13}.$$

По формуле (*) находим

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1)\cdot P(A_3 \mid A_1A_2) = \frac{7}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{3}{13} = \frac{1}{26}.$$

Формула полной вероятности

Операции над вероятностями представляют собой правила, служащие для вычисления вероятностей случайных событий через вероятности элементарных событий. При решении многих задач оказывается полезным одно следствие из этих правил, известное под названием *формулы полной вероятности*. Выведем эту формулу.

Пусть событие A может произойти только с одним из событий H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу несовместных равновозможных событий. Тогда вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1) + P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2) + \ldots + P(H_n)\cdot P(A\,|\,H_n),$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i). \qquad (**)$$

В самом деле, так как событие A может произойти только с одним из событий H_1, H_2, …, H_n , образующих полную группу, то

$$A=AH_1+AH_2+\ldots+AH_n.$$

Из несовместности событий H_1, H_2, …, H_n следует несовместность событий AH_1, AH_2, …, AH_n. Поэтому

$$P(A)=P(AH_1)+P(AH_2)+\ldots+P(AH_n).$$

Применив к каждому слагаемому последнего равенства правило умножения вероятностей $P(AH_\text{i})=P(H_\text{i})\cdot \text{P}(AH_\text{i})$, получим требуемую формулу (**).

Пример. В учебных мастерских на станках a, b и c изготовляют соответственно 25, 35 и 40 % всех деталей. В их продукции брак составляет соответственно 15, 12 и 6 %. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь дефектна.

Решение. Обозначим события: A – «наугад взятая деталь дефектна», H_1 – «деталь изготовлена на станке a», H_2 – «деталь изготовлена на станке b», H_3 – «деталь изготовлена на станке c».

Очевидно, что события H_1, H_2, H_3 образуют полную группу и $P(H_1) = 0{,}25$, $P(H_2) = 0{,}35$, $P(H_3) = 0{,}4$. Кроме того, числа 0,15; 0,12; 0,06 (15 %, 12 %, 6 %) являются условными вероятностями события A при выполнении событий (гипотез) H_1, H_2, H_3 соответственно, т. е.

$$P(A|H_1)=0{,}15,\ P(A|H_2,)=0{,}12,\ P(A|H_3)=0{,}06.$$

По формуле (1) находим

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i) = P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1) + P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2) +$$

$$+P(H_3)\cdot P(A\,|\,H_3)=0{,}25\cdot 0{,}15+0.35\cdot 0{,}12+0{,}4\cdot 0{,}06=0{,}1035.$$

Формула Бейеса

С помощью формулы полной вероятности можно доказать **формулу Бейеса:**

$$P(H_i\,|\,A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)}{P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1) + P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2) + \ldots + P(H_n)\cdot P(A\,|\,H_n)}.$$

Доказательство. Из теоремы 3 о вероятности произведения двух зависимых событий A и B имеем

$$P(AH_i) = P(H_i \mid A) \cdot P(A) \quad \Leftrightarrow \quad P(H_i \mid A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} \quad \Leftrightarrow \quad P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)}.$$

Заменив в последнем равенстве $P(A)$ его значением из формулы (*), получаем формулу Бейеса.

Формула Бейеса позволяет переоценивать вероятности гипотез, принятые до испытания, по результатам уже произведенного испытания.

Пример. Имеются три одинаковые по виду урны. В первой урне 15 белых шаров, во второй – 10 белых и 5 черных, в третьей – 15 черных шаров. Из выбранной наугад урны вынули белый шар. Найти вероятность того, что шар вынут из первой урны.

Решение. Введем обозначения: событие А – «появление белого шара»; гипотезы: H_1 – «выбор первой урны», H_2 – «выбор второй урны», H_1 – «выбор третьей урны».

Имеем:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

$$P(A \mid H_1) = 1, \quad P(A \mid H_2) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad P(A \mid H_3) = 0.$$

Искомую вероятность находим по формуле (2):

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Формула Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность того, что произойдет событие A, равна p, а следовательно, вероятность того, что оно не произойдет, равна $q=1-p$. Требуется найти вероятность того, что при n повторных испытаниях событие A произойдет m раз. Искомую вероятность обозначим $p_{m,\,n}$.

Событие, состоящее в том, что событие А происходит при каждом из m первых испытаний и не происходит при остальных n-m испытаниях, можно записать в виде

$$\underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m} \cdot \underbrace{\overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \ldots \cdot \overline{A}}_{n-m}.$$

Так как все n испытаний, по условию, независимы, то можно применить правило вычисления вероятности произведения независимых событий; получим

$$P(\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{n-m})=p^m q^{n-m}.$$

Событие A может произойти m раз при n испытаниях, но при этом может получиться и другая последовательность чередований событий A и $\overline{A}$, однако каждый раз получим одну и ту же вероятность $p^m q^{n-m}$. Очевидно, что число чередований событий A и $\overline{A}$ равно числу сочетаний C_n^m из n элементов по m, поэтому по теореме сложения вероятностей для несовместных событий искомая вероятность вычисляется по формуле

$$p_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Эта формула называется *формулой Бернулли*.

Примеры:

1. В урне 20 шаров: 15 белых и 5 черных. Вынули подряд 5 шаров, причем каждый вынутый шар возвращается в урну и перед извлечением следующего шары в урне тщательно перемешиваются. Найти вероятность того, что из пяти вынутых шаров будет два белых.

Решение. Вероятность появления белого шара в каждом испытании равна $p=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$, а вероятность непоявления белого шара равна $q=1-p=\frac{1}{4}$. По формуле Бернулли находим

$$p_{2,5}=C_5^2 p^2 q^{5-2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{45}{512}.$$

2. Вероятность того, что расход электроэнергии в университете в течение одних суток не превысит установленной нормы, равна $p = 0{,}85$. Найти вероятность того, что в ближайшие 25 суток расход электроэнергии в течение 20 суток не превысит нормы.

Решение. Так как вероятность нормального расхода электроэнергии на протяжении каждых из 25 суток постоянна и равна p=0,85, то вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна q=1–p=1–0,85=0,15.

По формуле Бернулли находим искомую вероятность:

$$p_{20,25}=C_{25}^{20}p^{20}q^{25-20}=C_{25}^{5}(0{,}85)^{20}(0{,}15)^5\approx 0{,}156.$$

Тема 8. Дискретная случайная величина

Случайной величиной называется переменная X, которая в результате испытания может принять одно и только одно значение, не известное заранее и зависящее от исхода испытания.

Примеры:

1. При бросании игральной кости случайной является величина X – число очков, которое выпадет на верхней грани. Возможными значениями величины X служат числа 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2. Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина X, возможными значениями которой являются числа 0, 1, 2, …, 100.

Величина X называется **дискретной случайной величиной**, если множество ее возможных значений представляет собой конечную или бесконечную последовательность чисел x_1, x_2, … , x_n, … и если каждое соотношение $X = x_i$ $(i = 1,2, \dots)$ является элементарным случайным событием и имеет определенную вероятность $p_i = P\,(X = x_i)$. Под $X = x_i$ понимается событие, состоящее в том, что величина X принимает значение x_i.

Мы будем рассматривать дискретные случайные величины лишь с конечными множествами значений.

Законом распределения дискретной случайной величины X называется соответствие между возможными значениями x_i и их вероятностями p_i .

Закон распределения (как и всякую функцию) можно задать **таблично, аналитически** и **графически**. Если случайная величина X может принимать лишь конечное число различных значений x_1, x_2, … , x_n, то элементарные события $X = x_1$, $X = x_2$, …, $X = x_n$ образуют полную группу и поэтому сумма их вероятностей равна единице, т. е.

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Закон распределения такой величины может быть представлен в виде таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Вот, например, как выглядит таблица распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа очков, выпадающего при бросании правильной игральной кости:

X	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Математическим ожиданием M(X) дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений x_i на их вероятности p_i:

$$M(X) = x_1\,p_1 + x_2\,p_{21} + \;\ldots\; + x_m\,p_m.$$

Пример. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная ее закон распределения:

X	–1	0	1	2	3
p	0,2	0,1	0,25	0,15	0,3

Решение. По формуле определению математического ожидания находим

$$M(X) = -1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}25 + 2\cdot 0{,}15 + 3\cdot 0{,}3 = 1{,}25\ .$$

Пусть при проведении n независимых испытаний дискретная случайная величина X может принимать m_1 раз значение x_1, m_2 раз значение x_2, …, m_k раз значение x_k. Тогда сумма всех значений величины X равна

$$x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_km_k\ .$$

Найдем среднее арифметическое $\overline{X}$ значений, принимаемых величиной X:

$$\overline{X} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_km_k}{n} = x_1\frac{m_1}{n} + x_2\frac{m_2}{n} + \ldots + x_k\frac{m_k}{n}.$$

Но

$$\frac{m_1}{n} = P(X = x_1) = p_1, \qquad \frac{m_2}{n} = P(X = x_2) = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{m_k}{n} = P(X = x_k) = p_k,$$

поэтому

$$\overline{X} = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k = M(X).$$

Таким образом, $M(X) = \overline{X}$, т. е. математическое ожидание дискретной случайной величины X равно среднему арифметическому полученных значений этой величины.

Пример. Найти среднее значение количество очков при бросании двух игральных костей.

Решение. Значениями дискретной случайной величины X в нашем примере являются числа 2, 3, 4, … , 12. Поскольку среднее значение равно математическому ожиданию, то получим

$$M(X) = 2\times\frac{1}{36} + 3\times\frac{2}{36} + 4\times\frac{3}{36} + 5\times\frac{4}{36} + 6\times\frac{5}{36} + 7\times\frac{6}{36} + 8\times\frac{5}{36} +$$

$$+ 9\times\frac{4}{36} + 10\times\frac{3}{36} + 11\times\frac{2}{36} + 12\times\frac{1}{36} = 7.$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1) Математическое ожидание постоянной величины C равно самой постоянной:

$$M(C) = C.$$

2) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

3) Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$M(X\cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

4) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = C\cdot M(Y).$$

Рассмотрим следующий пример. Найти математическое ожидание случайных величин X и Y, зная законы их распределения:

X	–8	–4	–1	1	3	7
p	1/12	1/6	1/4	1/6	1/12	1/4

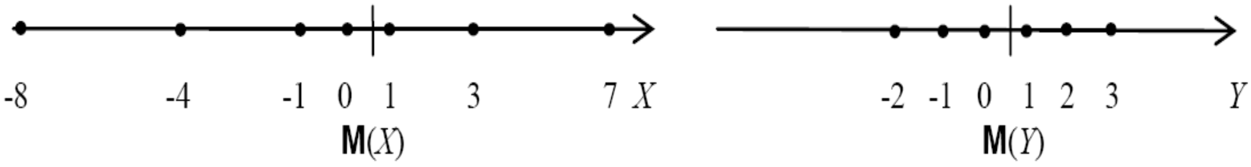
Y	–2	–1	0	1	2	3
p	1/6	1/6	1/12	1/3	0	1/4

Решение. По формуле определению математического ожидания имеем:

$$\mathrm{M}(X) = -\frac{8}{12}-\frac{4}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{3}{12}+\frac{7}{4}=\frac{7}{12},$$

$$\mathrm{M}(Y) = -\frac{2}{6}-\frac{1}{6}+0+\frac{1}{3}+0+\frac{3}{4}=\frac{7}{12}.$$

Мы получили любопытный результат: законы распределения величин X и Y разные, а их математические ожидания одинаковы. Из Рисунок 1.14 видно, что значения величины Y сосредоточены около математического ожидания $\mathrm{M}(Y)$ (Рисунок 14б), а значения величины X разбросаны (рассеяны) подальше от математического ожидания $\mathrm{M}(X)$ (Рисунок 14а).



а) *б*)

Рисунок 14 − Дискретные величины с одинаковым математическим ожиданием

Основной числовой характеристикой рассеяния возможных значений случайной величины X служит **дисперсия** $D(X)$, которая определяется по формуле

$$D(X) = M\big(X - M(X)\big)^2$$

Преобразуем формулу следующим образом:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2X \cdot M(X) + M^2(X)) =$$
$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

При преобразовании использовались свойства математического ожидания и тот факт, что $M(X)$ – величина постоянная.

Таким образом, получим альиернативную **формулу вычисления дисперсии,**

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Величина $\sigma = \sqrt{D(X)}$ называется **средним квадратическим отклонением** случайной величины X.

Пример. Дискретная случайная величина распределена по закону:

X	–1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти $D(X)$.

Решение. Сначала найдем

$$M(X) = -1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}4 = 0{,}9,$$

а затем

$$M(X^2) = 1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}4 = 2{,}1.$$

Используя формулу вычисления дисперсии получим:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 2{,}1 - 0{,}81 = 1{,}29.$$

Мода дискретной случайной величины $Mo(X)$ – **это** значение **случайной величины**, которое имеет наибольшую вероятность.

Случайная величина называется **непрерывной,** если значения, которые она может принимать, заполняют конечный или бесконечный промежуток числовой оси. Каждому промежутку (a, b) из множества значений случайной величины непрерывного типа отвечает определенная вероятность $P(a < X < b)$ того, что значение, принятое случайной величиной, попадает в этот промежуток.

Закон распределения непрерывной случайной величины задается с помощью плотности распределения вероятности $f(x)$. Вероятность $P(a < X < b)$ того, что значение, принятое непрерывной случайной величиной X, попадает в промежуток (a, b), определяется равенством

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}.$$

График функции $f(x)$ называется *кривой распределения.* Геометрически вероятность попадания случайной величины в промежуток (a, b) равна площади соответствующей криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения, осью Ox и прямыми $x= a$ *и* $x = b$. На рисунке привден пример для $a = -1$, $b = 1$.

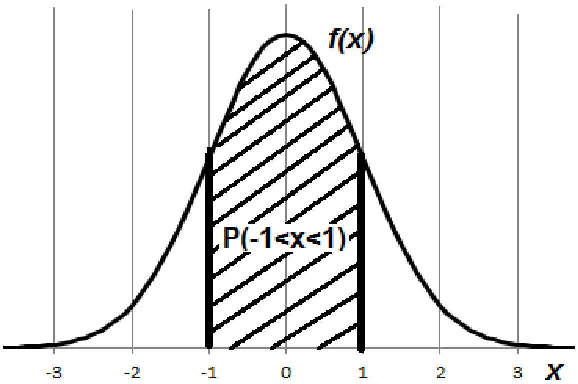


Рисунок 15 − Вероятность попадания случайной величины в промежуток (-1, 1)

Свойства плотности распределения:

$$1)\ f(x) > 0; \quad 2)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Функцией распределения вероятности случайной величины называется функция

$$F(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Из последнего равенства следует, что $f(x) = F'(x)$. Иногда $f(x)$ называют дифференциальной функцией распределения вероятности, а $F(x)$ - интегральной. Чтобы найти вероятность $P(a < X < b)$, того, что значение, принятое случайной величиной X, принадлежит промежутку (a, b), определяется равенством:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Свойства функции распределения вероятности:

1) $F(x)$ - неубывающая функция;

2) $F(-\infty) = 0$; 3) $F(\infty) = 1$.

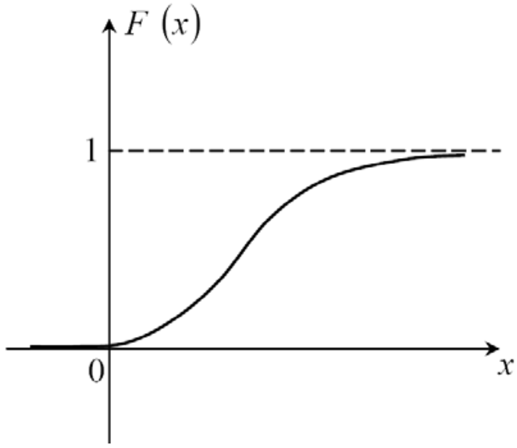


Рисунок 16 − Пример функции распределения

Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется равенством

$$\mathrm{M}(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

при условии, что интеграл абсолютно сходится.

Модой *Mo*(*X*) непрерывной случайной величины X называют то ее возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения. Если распределение имеет два одинаковых максимума, его называют *бимодальным*.

Медианой *Me*(*X*) непрерывной случайной величины X называют то ее возможное значение, которое **определяется равенством**

$$P(X < Me(X)) = P(X > Me(X)) = 0{,}5.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X определяется равенством:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(M(X)\right)^2.$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется равенством $\sigma = \sqrt{D(X)}$:

Свойства математического ожидания и дисперсии для дискретных случайных величин, верны и для **непрерывных** величин.

Начальным моментом порядка *k* случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k:

$$v_k = M(X^k).$$

В частности, начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию: $v_1 = M(X)$.

Центральным моментом порядка *k* случайной величины X называют математическое ожидание величины $(X\text{-}M(X))^k$:

$$v_k = M((X\text{-}M(X))^k).$$

В частности, центральный момент первого порядка равен нулю, а центральный момент второго порядка равен дисперсии. Центральные моменты можно вычислять с помощью начальных моментов. Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то все **центральные моменты нечетного порядка** равны нулю

Отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратического отклонения называется **асимметрией:**

$$As = \mu_3/\sigma^3.$$

Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то $As = 0$.

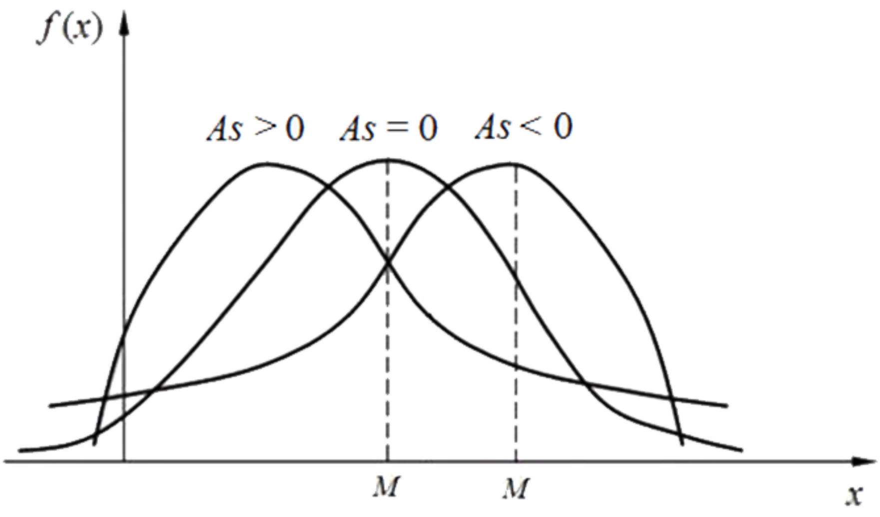


Рисунок 17 − Примеры асимметрией случайных величин

Эксцессом случайной величины X называется величина E, определяемая равенством

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

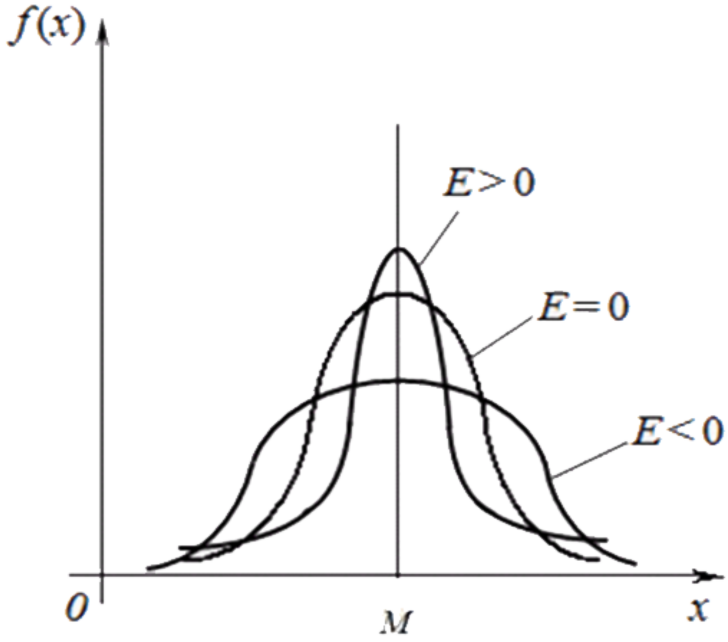


Рисунок 18 − Примеры кривых распределения с различными значениями эксцесса

Для нормального распределения $E = 0$. Кривые, более островершинные, чем нормальная, имеют положительный эксцесс, более плосковершинные – отрицательный.

Закон больших чисел

Основная особенность случайной величины состоит в том, что нельзя заранее предвидеть, какое из возможных значений она примет в результате испытания. Однако при достаточно большом числе испытаний суммарное поведение случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным. Весьма важным при этом является знание условий возникновения закономерностей случайной величины. Эти условия составляют содержание ряда теорем, получивших общее название закона больших чисел. Впервые этот закон (в простейшей его форме) был сформулирован Яковым Бернулли в виде теоремы, устанавливающей связь между вероятностью случайного события и его относительной частотой.

Относительной частотой $W(A)$ случайного события A называют отношение числа m_n испытаний, в результате которых событие произошло, к общему числу n проведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m_n}{n}\ .$$

Оказывается, что при многократном повторении испытания относительная частота случайного события принимает значения, близкие к вероятности того, что оно произошло в результате одного испытания. Например, знаменитый статистик К. Пирсон бросил монету 24000 раз и получил при этом 12012 гербов, что дает относительную частоту, очень близкую к вероятности, равной 1/2, появления герба в одном испытании.

Теорема Бернулли. С вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом числе независимых испытаний относительная частота случайного события как угодно мало отличается от его вероятности при отдельном испытании.

Наиболее общим законом больших чисел является теорема П. Л. Чебышева.

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то последовательность $\{\overline{X}_n - \mathrm{M}(\overline{X}_n)\}$ сходится по вероятности к нулю при $n \to \infty$, т. е.

$$\{\overline{X}_n - \mathrm{M}(\overline{X}_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

или

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{M}(\overline{X}_n), \qquad (*)$$

где

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

$$\mathrm{M}(\overline{X}_n) = \frac{\mathrm{M}(X_1) + \mathrm{M}(X_2) + \ldots + \mathrm{M}(X_n)}{n}.$$

Отметим, что если все случайные величины X_n имеют одно и то же математическое ожидание a:

$$\mathrm{M}(X_n)=a \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

то математическое ожидание среднего арифметического $\overline{X}_n$ также совпадает с a:

$$\mathrm{M}(\overline{X}_n) = a \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

В этом случае соотношение (*) принимает вид

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a.$$

Сущность теоремы Чебышева состоит в том, что среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин с равномерно ограниченными дисперсиями утрачивает характер случайной величины.

Тема 9. Основные распределения случайных величин

Биномиальным называется закон распределения дискретной случайной величины X, отражающей число появлений k наблюдаемого события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p. Вероятность значения $X= k$ вычисляют по *формуле Бернулли*:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Математическое ожидание и дисперсия для биномиального распределения соответственно имеют вид:

$$M(X) = np \text{ и } D(X) = np(1-p).$$

Пример. Вероятность попадания стрелком в мишень равна 0.7. Стрелок делает 4 выстрела. Построить закон распределения случайной величины X − числа попаданий в мишень, функцию распределения $F(x) = P(X < x)$, найти математическое ожидание и дисперсию.

Подставляя в формулу $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ поочередно возможные значения количества попаданий k = 0, 1, 2, 3, 4, найдем значения $P_4(0)$= 0,0081, $P_4(1)$ = 0,0756, $P_4(2)$ = 0,2646, $P_4(3)$ = 0,4116, $P_4(4)$ = 0,2401. Таким образом, закон распределения случайной величины X будет иметь вид:

X	0	1	2	3	4
P	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Построим функцию распределения.

P(X<0) = 0, следовательно $F(x) = 0$, при $x<0$;

$F(x)$ = P(X< x) = $P_4(0)$ = 0.0081 при $0 < x \le 1$;

$F(x)$ = P(X< x) = $P_4(0) + P_4(1)$ = 0.0837 при $1 < x \le 2$;

$F(x)$ = P(X< x) = $P_4(0) + P_4(1) + P_4(2)$ = 0.3483 при $2 < x \le 3$;

$F(x)$ = P(X< x) = $P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) + P_4(3)$ = 0.7599 при $2 < x \le 4$;

$F(x)$ = P(X< x) = $P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) + P_4(4)$ = 1 при $4 < x$;

График функции распределения приведен на рисуноке 19.

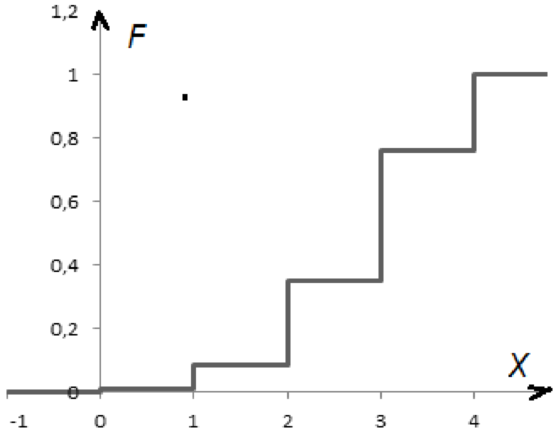


Рисунок 19 − График функции распределения

Вычислим математическое ожидание и дисперсию:

$M(X) = np = 0.7\times4 = 2.8$; $D(X) = npq = 0.7\times0.3\times4 = 0.84$.

Равномерным называется распределение таких случайных величин, все значения которых лежат на некотором отрезке $[a, b]$ и имеют постоянную плотность вероятности на этом отрезке

Функция и плотность равномерного распределения приведены на рисунке 20.

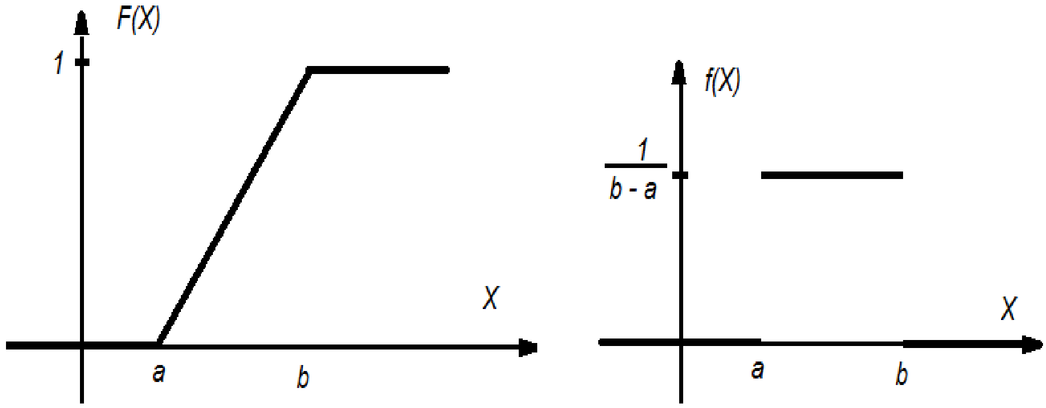


Рисунок 20 − Функция и плотность равномерного распределения

Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение имеют вид

$$M(X) = \frac{a+b}{2},\ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Экспоненциальный закон распределения имеет функцию плотности распределения вида

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

и функцию распределения вида

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение для экспоненциального распределения имеют вид

$$M(X) = \frac{1}{\lambda},\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Нормальный закон распределения – закон распределения с плотностью распределения, задаваемой функцией Гаусса (Рисунок 21):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение для нормального распределения имеют вид:

$$M(X) = a,\ D(X) = \sigma^2, \sigma(X) = \sigma.$$

Мода и медиана нормального распределения равны мате-матическому ожиданию: $Mo(X) = Me(X) = a$.

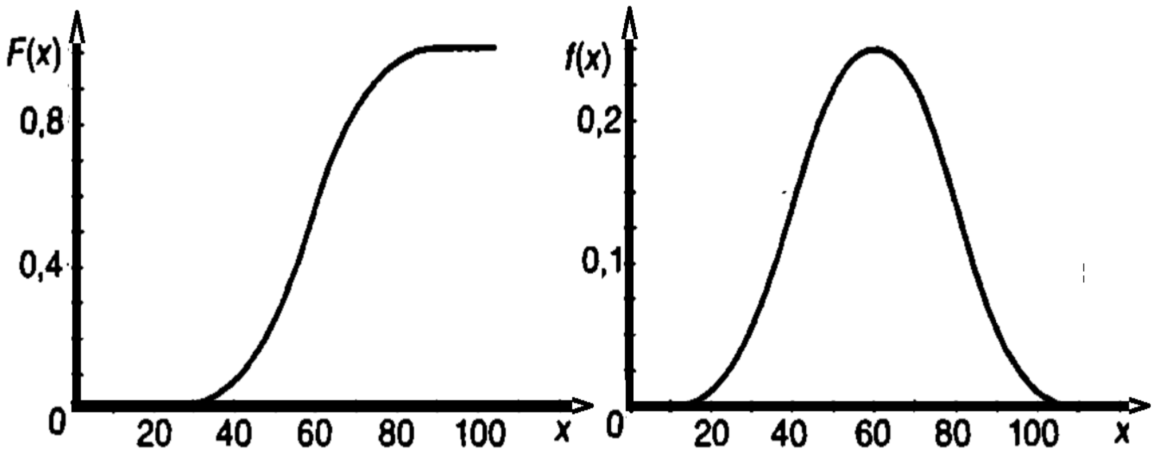


Рисунок 21 − Примеры функции распределения и плотности вероятности нормального распределения

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β):

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}$ - функция Лапласа.

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

1) $\Phi(0) = 0$; 2) $\Phi(+\infty) = 1$; 3) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Вероятность, того что модуль отклонения меньше δ:

$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma)$ (*)

Значения функции Лапласа можно найти с помощью специальных таблиц или, например, вычислить в Excel, введя в строку формул:

"=НОРМСТРАСП(x) - 0,5"

В статистическом анализе данных, часто используется **правила «3σ», «2σ»**. Определим вероятность попадания нормально распределенной случайной величины ξ с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 в интервал (a - 3σ; a + 3σ), воспользовавшись формулой (*):

$$P(a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma) = P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3).$$

По таблице находим $\Phi(3) = 0{,}49865$. Таким образом, вероятность отклонения нормальной случайной величины ξ от ее математического ожидания a менее, чем на 3σ равна $2\Phi(3) = 0{,}9973$.

Аналогично $P(|\xi - a| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0{,}954$. Например, для нормальной случайной величины с математическим ожиданием $a = 2$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 1$ вероятность попадания в диапазон (a - 2σ; a + 2σ) или (0, 4) равна 0,954, а за его пределы -0.046 (Рисунок 22).

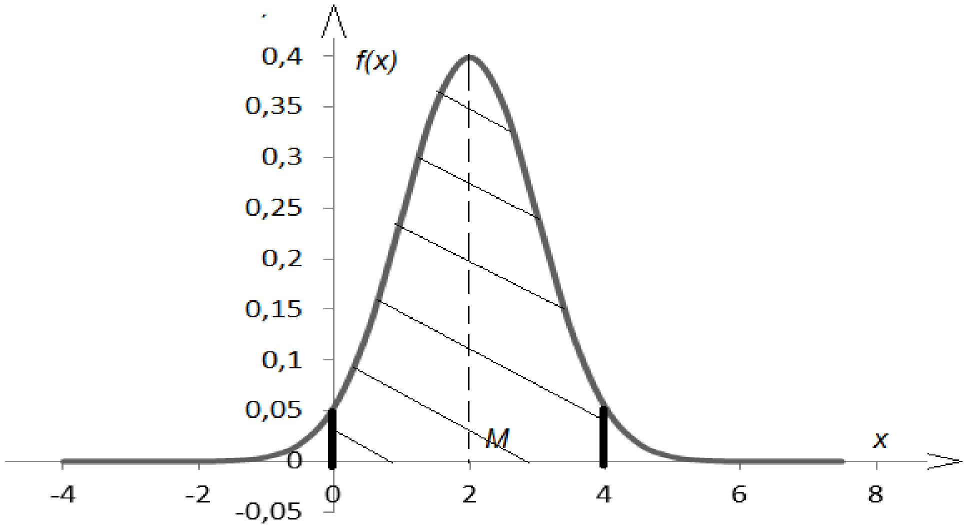


Рисунок 22 − Вероятность попадания в диапазон $(a$ - 2σ; $a + 2\sigma)$ для нормальной случайной величины с математическим ожиданием $a = 2$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 1$

Гамма-распределение неотрицательной случайной величины X определяется функцией плотности распределения вида:

$$\Gamma_{\lambda,k}(x) = f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}, \ (x > 0),$$

где $\lambda > 0$, $k > 0$ – параметры распределения; $\Gamma(k)$ – гамма-функция

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-t} t^{k-1}\, dt.$$

Основные свойства гамма-функции:

1) $\Gamma(k+1) = k\,\Gamma(k)$; 2) $\Gamma(1) = 1$;

3) для целых неотрицательных k: $\Gamma(k+1) = k!$.

Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величин имеющей гамма-распределение имеют вид:

$$M(X) = \frac{k}{\lambda}, \ D(X) = \frac{k}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}.$$

Пусть случайная величина Y, распределенна по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Случайная величина

$$\chi^2 = \left(\frac{Y - a}{\sigma}\right)^2.$$

называется **случайной величиной хи-квадрат χ^2 с одной степенью свободы.**

Случайная величина

$$\chi^2 = \left(\frac{Y_1 - a_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{Y_2 - a_2}{\sigma_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{Y_n - a_n}{\sigma_n}\right)^2,$$

где Y_1, Y_2, … Y_n – нормально распределенные случайные величины с математическими ожиданиями и средне-квадратическими отклонениями $(a_1;\ \sigma_1)$,

(a_2; σ_2) … (a_n; σ_n) соответственно, называется **случайной величиной хи-квадрат χ^2 с n степенями свободы**. Плотность распределения случайной величины χ^2 подчиняется гамма-распределению $\Gamma_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}}$ и имеет вид

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}}.$$

Функция распределения χ^2:

$$F(\chi^2) = F(\chi^2 < \chi_0^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\chi^2}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}}d(\chi^2).$$

Квантилем $\chi^2_{\alpha,n}$, отвечающим заданному уровню вероятности α, называется такое значение $\chi^2 = \chi^2_{\alpha,n}$, при котором

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\lambda,n}) = \int_{\chi^2_{\alpha,n}}^{\infty} f(\chi^2)\,d(\chi^2) = \alpha.$$

Распределение Стьюдента (t-распределение) используется при статистических вычислениях, связанных с нормальным законом, когда среднее квадратическое отклонение a неизвестно и подлежит определению по опытным данным.

Пусть Y, Y_1, Y_2, … Y_n – нормально распределенные случайные величины с математическими ожиданиями равными M = 0 и среднеквадратическими отклонениями равными $\sigma = 1$. Случайная величина

$$t_n = \frac{Y}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}} = \frac{Y}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}},$$

называется случайной величиной, имеющей распределение Стьюдента с n степенями свободы. Плотность распределения случайной величины t имеет вид:

$$f(t) = S(t,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, -\infty < t < \infty.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины t соответственно равны:

$$M(t) = 0;\ D(t) = n/(n - 2).$$

При увеличении числа степеней свободы n график приближается к кривой Гаусса (Рисунок 23).

В статистических расчетах используются квантили t –распределения $t_{\frac{\alpha}{2},n}$, значения которых находятся из уравнения:

$$P(|t| > t_{\frac{\alpha}{2},n}) = 2\int_{t_{\frac{\alpha}{2},n}}^{\infty} f(t)\,d(t) = \alpha.$$

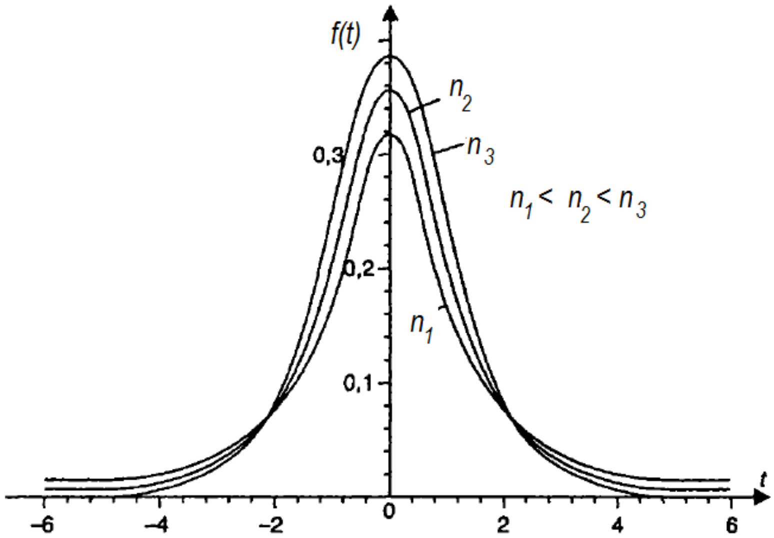


Рисунок 23 − График распределения функции Стьюдента при различных степенях свободы

Важные приложения имеет в статистике случайная величина

$$X = \frac{Y_1/k_1}{Y_2/k_2}.$$

где Y_1 – случайная величина, распределенная по закону χ^2 с k_1 степенями свободы, а Y_2 – случайная величина, распределенная по закону χ^2 с k_2 степенями свободы.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\dfrac{(k_1x)^{k_1}{k_2}^{k_2}}{(k_1x+k_2)^{k_1+k_2}}}}{xB\left(\dfrac{k_1}{2},\dfrac{k_2}{2}\right)}, x > 0, \\ 0, \quad x \le 0 \end{cases}$$

где B – бета-функция, имеющая вид

$$B\left(\frac{k_1}{2},\frac{k_2}{2}\right) = \int_0^1 x^{\frac{k_1}{2}-1}(1-x)^{\frac{k_2}{2}-1}\,dx.$$

Тема 10. Основные понятия математической статистики

Сутью математической статистики является выявление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления. Совокупность всех объектов, по которым проводится статистическое исследование, называют **генеральной совокупностью**. **Выборочная совокупность** (выборка) − это совокупность случайно отобранных объектов. **Объем совокупности** (объем выборки) − число объектов этой совокупности.

Выборка называется **репрезентативной** (представительной), если она достаточно хорошо представляет количественные соотношения генеральной совокупности.

Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака X из генеральной совокупности извлечена выборка $x_1, x_2, ..., x_к$ объема k. Наблюдаемые значения x признака X называются вариантами, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке,– **вариационным рядом**. Если значение x_i признака X наблюдалось n_i раз, то объем выборки

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Числа n_1, n_2, ..., $n_к$ называются **частотами**, а их отношения к объему выборки $w_i = n_i / n$, – **относительными частотами** соответствующих вариант.

Накопленная, или **кумулятивная**, частота $v_i = n_1 + n_2 + ... + n_{i-1}$ показывает, сколько наблюдалось элементов выборки со значениями признака, меньшими x_i Отношение накопленной частоты к общему объему выборки, v_i / n, называется относительной накопленной частотой. **Статистическое распределение выборки** – перечень вариант x_i и соответствующих им частот n_i (или) относительных частот w_i Статистическое распределение выборки можно записать в виде таблицы, в первой строке которой указаны значения вариант выборки x_i, а во второй – значения частот, либо значения относительных частот.

При большом числе наблюдений варианты группируют по отдельным интервалам их значений. Шкала признака разделяется на некоторое количество интервалов определенной ширины, и частота интервала равна сумме частот вариант, принадлежащих интервалу. Для непрерывной случайной величины интервал наблюдаемых значений случайной величины разбивается на k частичных интервалов равной длины $[x_0, x_1)$, $[x_1, x_2)$, ... , $[x_{k-1}, x_k]$ и подсчете частоты n_i/n попадания наблюдаемых значений в частичные интервалы. Количество интервалов выбирается произвольно – обычно не менее 5 и не более 15.

x_i	5	10	15	20	25	30	35	40
i	6	5	10	12	15	12	7	3

Для наглядности используют графическое представление статистических данных. Рассмотрим примеры такого представления.

Пример. Имеется распределение 70 фирм по количеству работающих на них менеджеров, заданной таблицей частот.

Признак X – число, работающих на фирме менеджеров является дискретным. Построим таблицу распределения относительных частот, полигон частот и полигон относительных частот.

Таблица распределения относительных частот, получается из таблицы частот делением строки частот n_i на 70.

x_i	5	10	15	20	25	30	35	40
w_i	3/35	1/14	1/7	6/35	3/14	6/35	1/10	3/70

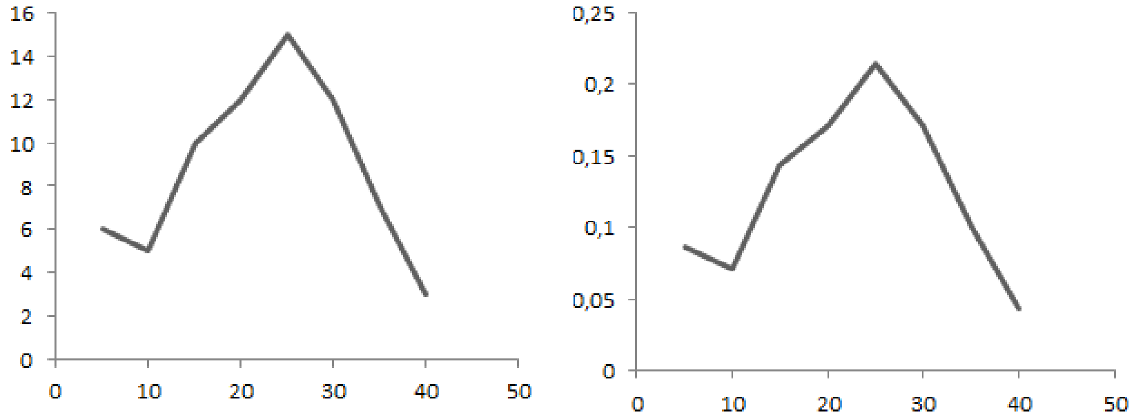


Рисунок 24 − Полигон частот и полигон относительных частот

Интервальный ряд изображают в виде **гистограммы частот** основаниями прямоугольников, которой служа частичные интервалы длины Δ, а высотами – величины n_i / Δ, называемые плотностями частот (Рисунок 24).

Пример. Дано распределение 50 кассиров магазинов по затратам времени на обслуживание одного покупателя.

x_{i-1}- x_i	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
n_i	2	11	25	8	4

Построим гистограммы частот. Признак X – затраты времени на обслуживание покупателя – непрерывный, ряд распределения – интервальный. Длина частичного интервала $\Delta = (x_k - x_0)/k = (12 - 2)/5 = 2$. Тогда плотность частот равна n_i / Δ и плотность относительных частот равна w_i / Δ.

x_{i-1}- x_i	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
n_i / Δ	1	5.5	11.5	4	2
w_i / Δ	0.2	1.1	2.5	0.8	0.4

Гистограмма частот и **гистограмма относительных частот** имеют вид, приведенный на рисунке 25.

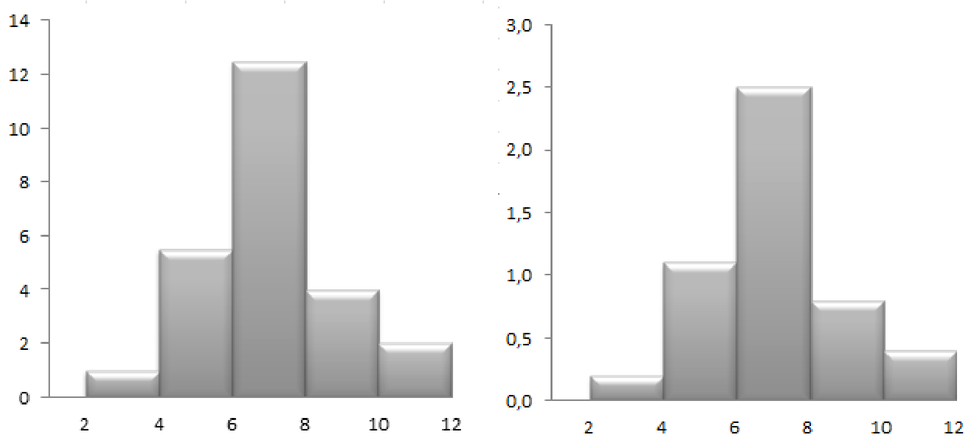


Рисунок 25 − Гистограмма частот и гистограмма относительных частот.

Площадь гистограммы частот S_n складывается из сумм площадей ее прямоугольников $S_i = \Delta\times(n_i / \Delta) = n_i$. Таким образом, $S_n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ – объёму выборки. Аналогично вычисляется площадь гистограммы относительных частот, ее значение $S_w = 1$.

В теории вероятностей гистограмме относительных частот соответствует график плотности распределения вероятностей $f(x)$, таким образом, гистограмму используют для подбора закона распределения генеральной совокупности.

Эмпирической функцией распределения или функцией распределения выборки называют функцию $F^*(x)$, которая для каждого значения x определяет относительную накопленную частоту события $X < x$:

$$F^* = \frac{v_i}{n} = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_i}{n}$$

Свойства эмпирической функции:

1. Значения эмпирической функции распределения принадлежат отрезку [0, 1].
2. $F^*(x)$ – неубывающая функция.
3. Если x_i – наименьшая варианта, а x_k – наибольшая, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_k$, и $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Выборочной средней $\bar{x}$ выборки объема n называется величина

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

В**ыборочной взвешенной средней** называется величина

$$\bar{x}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i\, n_i.$$

Частоты n_i в этом случае называются весами.

Выборочной дисперсией случайной величины называется выражение

$$D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}^*)^2 n_i.$$

Выборочной взвешенной дисперсией называется величина

$$D^* = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 w_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 n_i.$$

Величина $\sigma(x) = \sqrt{D(x)^*}$ называется средним квадратическим отклонением.

Пример. Дано распределение n=85 преподавателей факультета вуза по возрасту

x_{i-1}- x_i	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70
n_i	6	10	12	9	15	10	12	7	4

Построим таблицу накопленных относительных частот и график эмпирической функции распределения (Рисунок 26).

i	x_{i-1}-x_i	n_i	v_i=n_1+n_2+..+n_i	$F^*(x) = v_i/n$
0	-∞-25	0	0	0
1	25-30	6	6	0.071
2	30-35	10	16	0.188
3	35-40	12	28	0.329
4	40-45	9	37	0.435
5	45-50	15	52	0.612
6	50-55	10	62	0.729
7	55-60	12	74	0.871
8	60-65	7	81	0.953
9	65-70	4	85	1

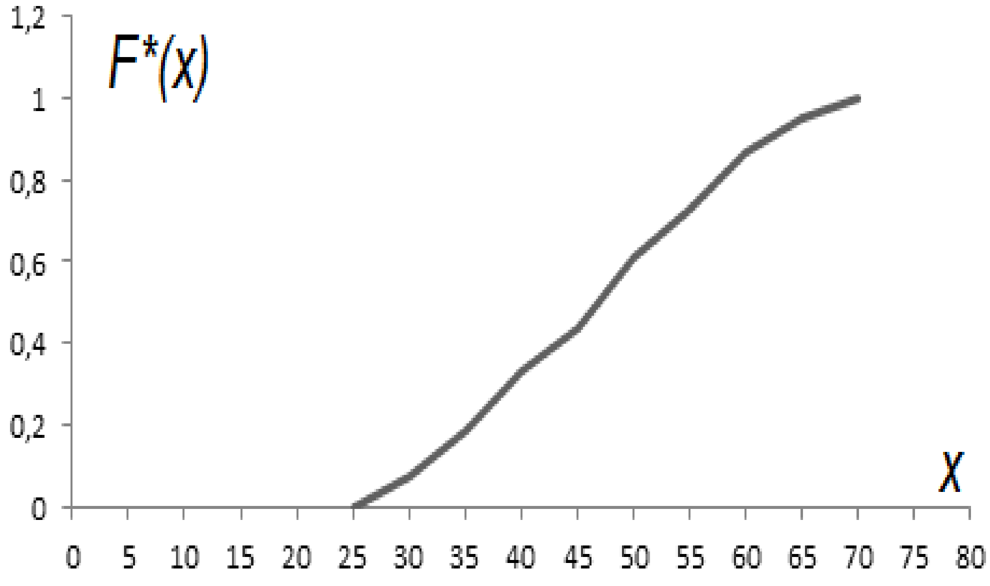


Рисунок 26 – График эмперической функциираспроеделения

Пример. Дано распределение 60 тестируемых по набранному количеству балов. Найдем оценки – выборочное взвешенное среднее (средний балл) дисперсию и среднее квадратичское отклонение, а так же построим график эмпирической функции распределения.

Кол-во баллов x_i	Кол-во тести-руемых n_i, набравших балл x_i	$x_i n_i$	v_i	$\underbrace{(x_i - \bar{x}^*)^2}_{\bar{x}_i} n_i$	$x_i^2 n_i$
3	5	15	0	64,8	45
4	4	16	5	27,04	64
5	6	30	9	15,36	150
6	10	60	15	3,6	360
7	15	105	25	2,4	735
8	12	96	40	23,52	768
9	6	54	52	34,56	486
10	2	20	58	23,12	200
	$n = \sum n_i = 60$	$\sum x_i n_i = 396$		$\sum \bar{x}_i^2 n_i$ 194.4	$\sum x_i^2 n_i = 2808$
	Средний балл $\bar{x}^* = (\sum x_i n_i)/n = 6.6$		$\overline{x^2} = (\sum x_i^2 n_i)/n = 46.8$		

Дисперсия *(вычисляется двумя разными способами)*

$$D = \overline{x^2} - (\bar{x}^*)^2 = 46{,}8 - (6{,}6)^2 = 3.24$$

$$D = \frac{1}{n}\sum_i^k (x_i - \bar{x}^*)^2 n_i = 3.24$$

$$\sigma = \sqrt{D} = 1{,}8$$

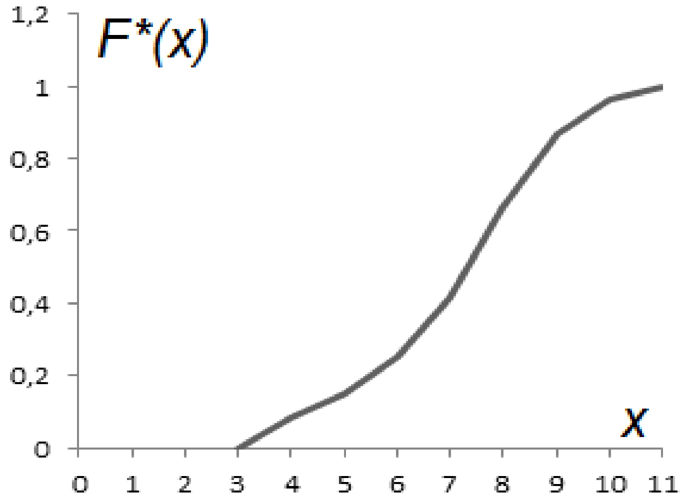


Рисунок 27 – График эмпирической функции распределения

Тема 11. Основы фрактальной геометрии

Фракталом принято называть объект, которые состоят из частей, подобных самому объекту.

Фракталы подразделяют на **геометрические, алгебраические, стохастические.**

Приведем алгоритмы геометричекого построения основынх геметрических фракталы (Рисунок 27 - 30).

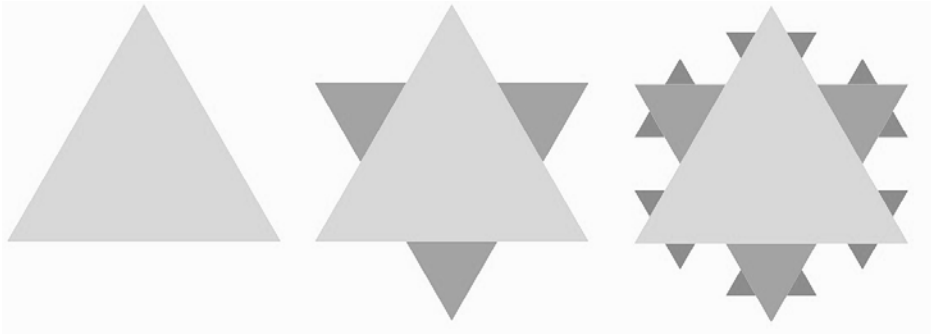


Рисунок 27 − Снежинка Коха

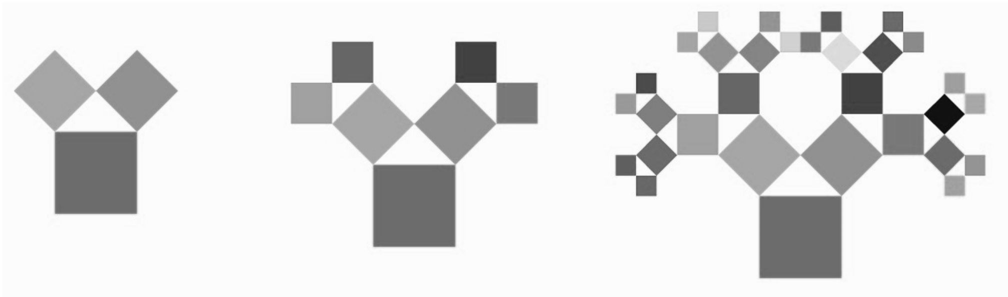


Рисунок 28 − Дерево Пифагора

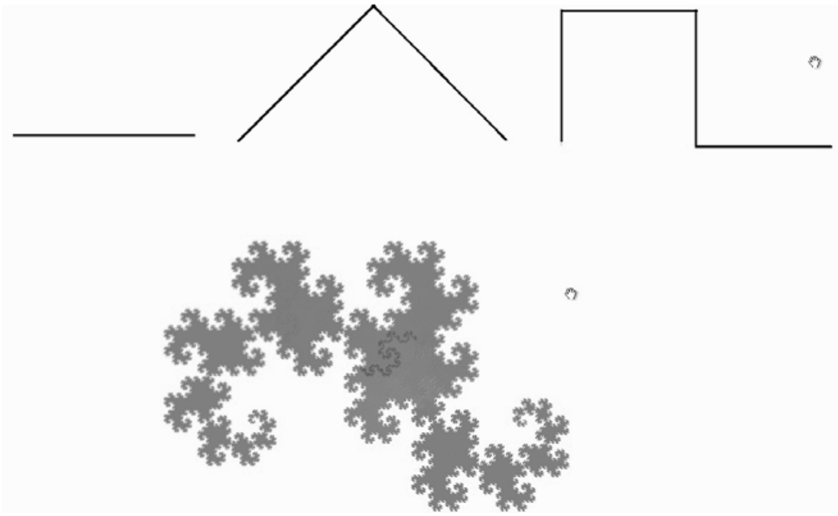


Рисунок 29 − Кривая Дракона

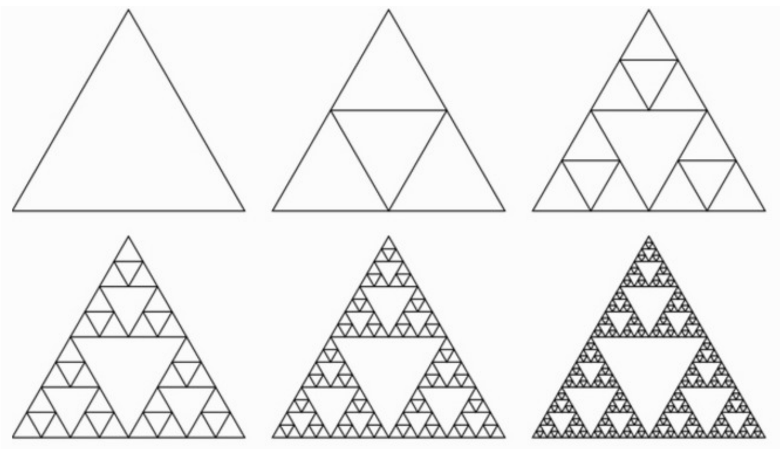


Рисунок 30 − Треугольник Серпинского

Под термином **размерность,** как правило, понимают число координат, необходимых для задания положения точки внутри фигуры. Любая линия (например, окружность или прямая) одномерна, так как достаточно одной координаты, чтобы точно указать точку на ней. Плоскость и поверхность шара двумерны. Однако в математике существуют объекты, к которым это определение не применимо, среди них и фракталы.

Фрактальную размерность определяют следующим образом.

Допустим, что фигура F, размерность которой мы хотим найти, расположена на плоскости, которая покрыта сеткой из квадратиков со стороной δ. Через $N(\delta)$ обозначим число квадратиков, которые пересекаются с фигурой F (объединение всех таких квадратиков содержит в себе F). Число $N(\delta)$ зависит от размера квадратиков: чем они меньше, тем больше их нужно, чтобы покрыть фигуру. Пусть эта зависимость выражается степенным законом: число $N(\delta)$ пропорционально некоторой степени $(1/\delta)^D$, будем считать, что фигура F имеет размерность D (для фракталов число D не является целым).

Это – определение фрактальной размерности по Минковскому. Для «хороших» фигур оно дает тот же результат, что и интуитивное представление о размерности. Например, посчитаем размерность квадрата со стороной 1 (располагая его на плоскости так, что стороны квадрата каждый раз лежат на линиях сетки):$N(1) = 1$, $N(1/2) = 4$, $N(1/3) = 9$, $N(1/4) = 16$, и т. д. Видно, что в этом случае $D = 2$, то есть квадрат двумерен, как и должно быть.

Для построения фракталов используют рекурсивные алгоритмы. Функция внутри себя может содержать вызов других функций. Например, функция $f(x)=x^2$, может содержать вызов $g(y)=sin(y)$: $f(sin(y))=sin^2(y)$. В том числе функция может вызвать саму себя. Такая функция называется рекурсивной.

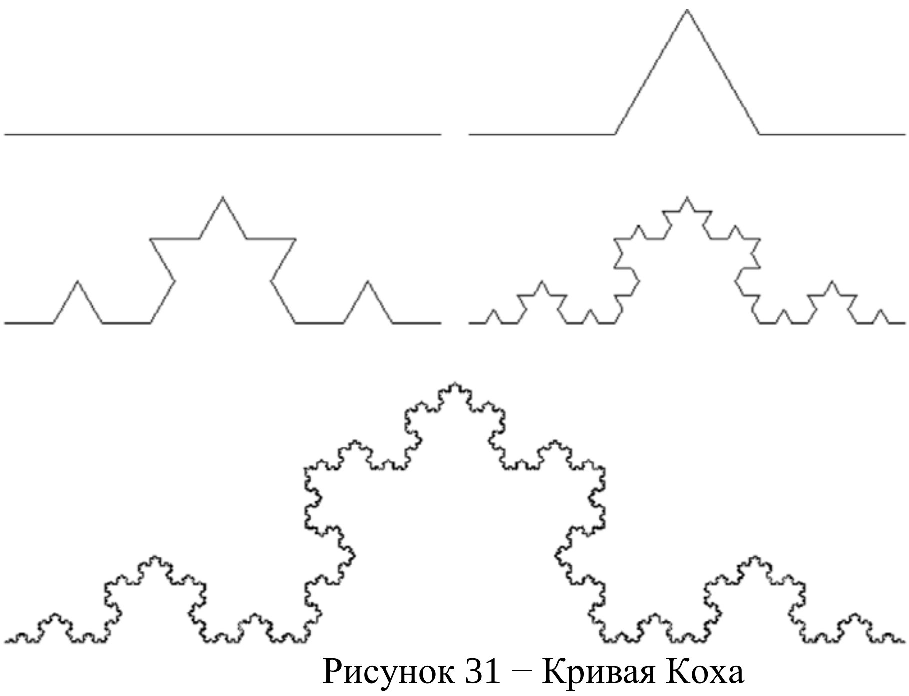


Рисунок 31 − Кривая Коха

Классическим примером рекурсивных алгоритмов является построение фракталов. Например, кривая Коха (Рисунок 31). Изначально берется отрезок прямой. Он делится на три части, средняя часть изымается и вместо нее строится угол, стороны которого равны длине изъятого отрезка, а именно 1/3 от длины исходного отрезка. Такая операция повторяется с каждым из получившихся 4-х отрезков. Процесс продолжается и после бесконечного числа таких итераций получается Кривая Коха.

Алгебраические и стохастические фракталы

Комплексное число – это выражение вида $a + bi$, где a, b – действительные числа, а i – так называемая *мнимая единица*, для которой выполняется: $i^2 = -1$. Число a называется *действительной частью*, а число bi – *мнимой частью* комплексного числа $z = a + bi$. Если $b = 0$, то вместо $a + 0i$ пишут просто a. Действительные число – это частный случай комплексных чисел.

Арифметические действия над комплексными числами те же, что и над действительными: их можно складывать, вычитать, умножать и делить друг на друга. Сложение и вычитание происходят по правилу

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i,$$

Правило умножения имеет следующий вид

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Число $\bar{z} = a - bi$ называется *комплексно-сопряженным* к $z = a + bi$. Легко убедиться, что $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

Из последнего равенства выводятся правила деления комплексных чисел:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Геометрическое представление комплексных чисел

Число $z = a + bi$ изображается вектором с координатами $(a; b)$ на декартовой плоскости или точкой - концом вектора с этими координатами (Рисунок1.32).

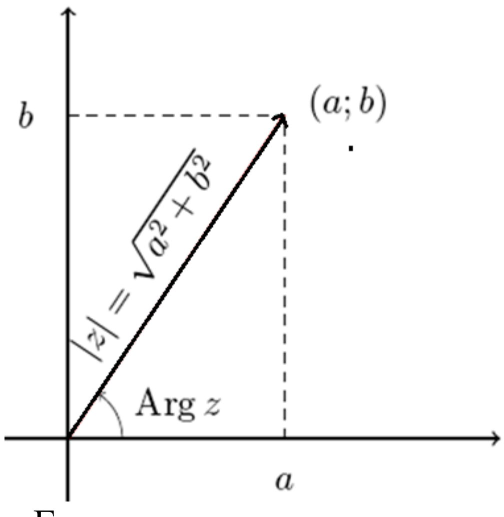


Рисунок 32 − Геометрическое представление комплексного числа

Сумма двух комплексных чисел изображается как сумма соответствующих векторов. По теореме Пифагора длина вектора с координатами $(a; b)$ равна

$\sqrt{a^2+b^2}$. Эта величина называется **модулем** комплексного числа $z = a + bi$ и обозначается

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Угол, который вектор образует с положительным направлением оси абсцисс, называется **аргументом** комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Аргумент определен не однозначно, а лишь с точностью до прибавления величины, кратной 2π радиан (или 360 градусов).

Если вектор длины r образует угол φ с положительным направлением оси абсцисс, то его координаты равны $(r\cos\varphi; r\sin\varphi)$. Отсюда получается **тригонометрическая форма записи** комплексного числа:

$$z = |z| \cdot (\cos(\operatorname{Arg} z) + i\sin(\operatorname{Arg} z)).$$

Умножение комплексных чисел в тригонометрической:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) + i\sin(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2))$$

то есть при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Отсюда следуют **формулы Муавра**:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n \cdot (\operatorname{Arg} z)) + i\sin(n \cdot (\operatorname{Arg} z))).$$

С помощью этих формул легко извлекать корни любой степени $n \in N$ из комплексных чисел. *Корень n-й степени из числа z* – это такое комплексное число w, что $w^n = z$. Тогда

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}, \operatorname{Arg} w = \frac{1}{n}\operatorname{Arg} z + \frac{2\pi k}{n},$$

Где k может принимать любое значение из множества $\{0, 1, ..., n-1\}$. Это означает, что всегда есть ровно n корней n-й степени из комплексного числа. На плоскости они располагаются в вершинах правильного n-угольника.

Множество Мандельброта - это множество точек c на комплексной плоскости, для которых последовательность z_n, определяемая итерациями $z_0 = 0$,

$$z_1 = z_0^2 + c,$$

$$\ldots$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

конечна (тоесть не уходит в бесконечность). Визуально множество Мандельброта выглядит набором бесконечного количества различных фигур, самая большая из которых называется кардиоидой, которая окружена всё уменьшающимися кругами, каждый из которых окружен еще меньшими кругами, и т. д. до бесконечности (Рисунок 33). При любом увеличении этого фрактала будут выявляться всё более и более мелкие детали изображения, дополнительные ветки с более мелкими кардиоидами, кругами. И этот процесс можно продолжать бесконечно.

Для построения графического изображения множества Мандельброта можно использовать алгоритм, называемый **escape-time**. Доказано, что всё множество целиком расположено внутри круга радиуса 2 на плоскости. Если для точки c последовательность итераций функции $z_{n+1} = z_n^2 + c$ с начальным значением $z_0 = 0$ после некоторого большого их числа N не вышла за пределы этого круга, то точка принадлежит множеству и красится в черный цвет. Если на каком-то этапе, меньшем N, элемент последовательности по модулю стал больше 2, то точка множеству не принадлежит и остается белой. Таким образом, можно получить черно-белое изображение множества, которое и было получено Мандельбротом. Чтобы сделать его цветным, можно, например, каждую точку не из множества красить в цвет, соответствующий номеру итерации, на котором ее последовательность вышла за пределы круга.

При итерациях функции $z_{n+1} = z_n^2 + c$ любая точка z комплексной плоскости имеет свой характер поведения (остается конечной, стремится к бесконечности, принимает фиксированные значения), а вся плоскость делится на части. Точки, лежащие на границах этих частей, обладают таким свойством: при сколь угодно малом смещении характер их поведения резко меняется (такие точки называют *точками бифуркации*). При этом множества точек, имеющих один конкретный тип поведения, а также множества бифуркационных точек часто имеют фрактальные свойства. Это и есть **множества Жюлиа** для функции $z_{n+1} = z_n^2 + c$ (Рисунок 34).

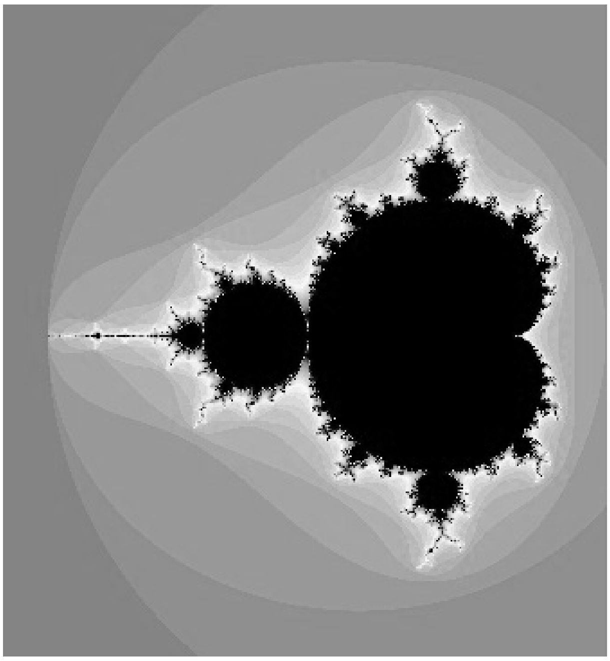


Рисунок 33 − Множество Мандельброта

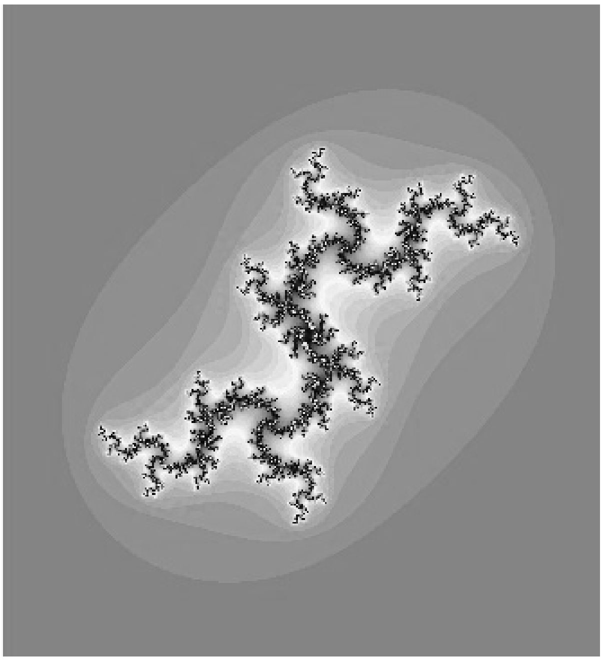


Рисунок 34 − Множество Жюлиа

Множества Мандельброта и Жюлиа являются **динамическими фракталами**. Еще одним известным классом фракталов являются **стохастические фракталы**, которые получаются в том случае, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря.

Система итерируемых функций (Iterated functions system) – это средство получения фрактальных структур путем итераций. IFS представляет собой систему функций из некоторого фиксированного класса функций, отображающих одно многомерное множество на другое. Наиболее простая IFS состоит из аффинных преобразований плоскости: суперпозиции, масштабирования, поворота, параллельного переноса и зеркального отображения. В общей виде аффинное преобразование на плоскости задается следующей системой уравнений:

Приведём пример алгоритма IFS для кривой Коха. Расположим первое поколение этого фрактала на сетке координат дисплея 640 х 350 (Рисунок 35)

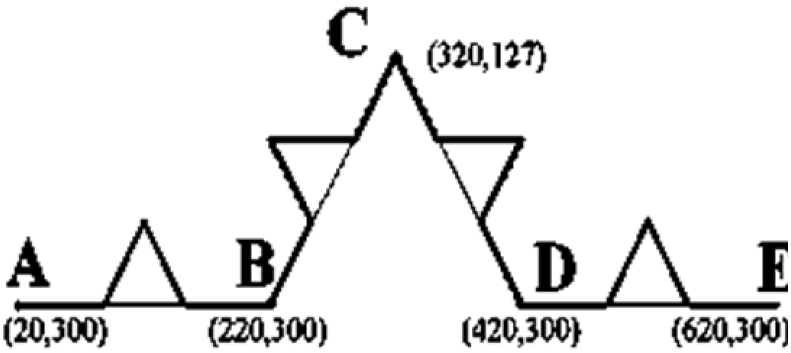


Рисунок 35 − Первое поколение кривой Коха

Для ее построения требуется набор аффинных преобразований, состоящий из четырех преобразований:

1) X' = 0.333*X + 13.333
Y' = 0.333*Y + 200

2) X' = 0.333*X + 413.333
Y' = 0.333*Y + 200

3) X' = 0.167*X + 0.289*Y + 130
Y' = -0.289*X + 0.167*Y + 256

4) X' = 0.167*X - 0.289*Y + 403
Y' = 0.289*X + 0.167*Y + 71

Рисунок 36 − Результат десяти итераций построения кривой Коха

Мультифрактал определяется не одним единственным алгоритмом построения, а несколькими последовательно сменяющими друг друга алгоритмами. Каждый такой алгоритм генерирует фрагмент своей фрактальной размерности. Природные объекты описываются мультифракталами.

Области применения фракталов

Фракталы широко применяются в компьютерной графике для сжатия изображений, построения ландшафтов, деревьев, растений и генерирования фрактальных текстур. Фракталы давно применяют в механике, акустике, физике благодаря уникальному свойству повторять очертания многих объектов природы. Фракталы позволяют приближать деревья, горные поверхности, молнии, трещины с более высокой точностью, чем приближения наборами отрезков или многоугольников. Фрактальные модели, как и природные объекты, обладают "шероховатостью" сохраняя это свойство при сколь угодно больших увеличениях модели.

Последнее время фракталы стали популярным инструментом у трейдеров для анализа состояния биржевых рынков. Фракталы рынка являются одним из индикаторов в торговой системе Била Вильямса.

Использование фрактальной геометрии при проектировании антенных устройств было впервые применено американским инженером Натаном Коэном. Натан вырезал из алюминиевой фольги фигуру в форме кривой Коха и наклеил её на лист бумаги, затем присоединил к приёмнику. Оказалось, что такая антенна работает не хуже обычной. И, хотя физические принципы работы такой антенны не изучены до сих пор, это не помешало Коэну основать собственную компанию и наладить их серийный выпуск.

Система назначения IP-адресов в сети Netsukuku использует принцип фрактального сжатия информации для компактного сохранения информации об узлах сети. Каждый узел сети Netsukuku хранит всего 4 Кб информации о состоянии соседних узлов, при этом любой новый узел подключается к общей сети без необходимости в центральном регулировании раздачи IP-адресов, что, например, характерно для сети Интернет. Таким образом, принцип фрактального сжатия информации гарантирует полностью децентрализованную, а следовательно, максимально устойчивую работу всей сети.

ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Тема 3. Системы линейных уравнений.

Лабораторная работа 1. Решение систем линейных уравнений с помощью табличного редактора Microsoft Excel (2 часа).

Цель работы: Используя встроенные математические функции Microsoft Excel научиться решать системы линейных уравнений методом Крамара и методом обратной матрицы.

Задание 1. Записать матрицу *A* размерности 4×4 и вектор *B* размерности 4×1 произвольно. Составить систему линейных уравнений с матрицей ***A*** и вектором значений ***B***. Решить систему линейных уравнений методом Крамара, используя функцию вычисления определителя матрицы МОПРЕД. Проверить полученное решение, используя функцию умножения матриц МУМНОЖ.

Пример решения.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1											Решение			Проверка		
2		введенные данные												(=МУМНОЖ(B2:E5;L2:L5))		
3		1	3	3	7			2				0,50365			2	
4	A =	-4	5	6	3		B =	-1			X =	-0,0292		A*X =	-1	
5		2	0	-1	6			2				0,10219			2	
6		5	-4	8	3			4				0,18248			4	
7																
8		1	3	3	7						Поскольку A*X = B делаем вывод, что задача решена правильно					
9	DA=	-4	5	6	3	=	-685	(=МОПРЕД(B7:E10)								
10		2	0	-1	6											
11		5	-4	8	3											
12																
13		2	3	3	7											
14	Dx1 =	-1	5	6	3	=	-345		x1 =	0,50365	(=G13/G8)					
15		2	0	-1	6											
16		4	-4	8	3											
17																
18		1	2	3	7						Решаемая система линейных уравнений.					
19	Dx2 =	-4	-1	6	3	=	20		x2 =	-0,0292						
20		2	2	-1	6											
21		5	4	8	3											
22																
23		1	3	2	7											
24	Dx3 =	-4	5	-1	3	=	-70		x2 =	0,10219						
25		2	0	2	6											
26		5	-4	4	3											
27																
28		1	3	3	2											
29	Dx4 =	-4	5	6	-1	=	-125		x2 =	0,18248						
30		2	0	-1	2											
31		5	-4	8	4											

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 + 3\,x_3 + 7\,x_4 = 2,\\
-4x_1 + 5x_2 + 6\,x_3 + 7\,x_4 = -1,\\
2x_1 - x_3 + 6\,x_4 = 2,\\
5x_1 - 4x_2 + 8\,x_3 + 3\,x_4 = 4.
\end{cases}
$$

Задание 2. Записать матрицу A размерности 7×7 и вектор B размерности 7×1 произвольно. Составить систему линейных уравнений с матрицей $\boldsymbol{A}$ и вектором значений $\boldsymbol{B}$. Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы, используя функцию вычисления обратной матрицы МОБР и функцию умножения матриц МУМНОЖ. Проверить полученное решение.

Пример решения.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1							Введенные данные											Проверка		
2				1	-2	3	-4	5	6	3			8					8		
3				3	1	-5	-2	3	7	6			-5					-5		
4				21	-6	4	9	2	-4	1		B =	2			A* X =		2	=	B
5		A	=	3	0	8	1	-12	-3	0			3					3		
6				2	3	-9	1	9	5	2			-6					-6		
7				1	0	7	-9	0	11	-7			10					10		
8				-5	-6	7	5	1	6	-10			0					0		
9																				
10							Вычислим обратную матрицу								Найдем решение					
11							(=МОБР(D2:J8))								(=МУМНОЖ(D12:J18;M2:M8))					
12				-0	0	0	-0	-0	0	-0,03								0,0621		
13				0,1	-0	-0	0,2	0,3	-0	-0,03								0,8143		
14				0,2	-0	-0	0,1	0,2	-0	0								1,6192		
15	A	-1	=	0,1	-0	-0	0,1	0,2	-0,1	0,06		X	=	A	-1	B	=	-0,506		
16				0,1	-0	0	0	0,1	-0	-0,01								0,9052		
17				0	0,1	-0	0,1	0	0	0,05								-0,41		
18				0,1	0	-0	0,1	0	-0,1	-0,01								0,2059		
19																				

Тема 5. Задачи оптимизации на графах.

Лабораторная работа 1. Достижимость (2 часа).

Цель работы: Научиться решать задачи на достижимость.

Задача. Фирма-поставщик располагает возможностью осуществлять бесплатные перелеты между 10 городами, перелеты между которыми заданы списком рейсов. Необходимо: 1) построить матрицу смежности графа бесплатных перелетов; 2) построить промежуточные матрицы, отражающие возможности перевозок с одной, двумя, тремя, четырьмя, пятью пересадками и т.д.; 3) построить матрицу достижимости графа; по матрице достижимости найти города в которые фирма-поставщик может осуществлять перелеты *из заданного города* бесплатно; 4) построить путь из одного заданного города в другой с заданным количеством пересадок, если таковой имеется. Ниже приведены варианты задачи:

Вариант 1

1) Список городов: *Бостон, Дрезден, Копенгаген, Нью-Йорк, Берлин, Пекин, Рим, Рейкьявик, Москва, Франкфурт.*

2) *Бостон – Дрезден, Бостон – Копенгаген, Дрещден – Берлин, Дрезден – Рим, Копенгаген – Нью-Йорк, Нью-Йорк – Пекин, Берлин – Копенгаген, Берлин – Франкфурт, Пекин – Берлин, Пекин – Москва, Рим – Бостон, Рим – Пекин, Рейкьявик – Пекин, Москва – Пекин, Франкфурт – Бостон, Франкфурт – Рейкьявик.*

3) *Дрезден.*

4) Из *Берлина* в *Москва* с *тремя* пересадками.

Вариант 2

1) Список городов: *Будапешт, Франкфурт, Киев, Кишинёв, Берлин, Стамбул, Рим, Рейкьявик, Москва, Гаага.*

2) *Будапешт – Берлин, Будапешт – Рим, Киев – Москва, Франкфурт – Берлин, Кишинёв – Стамбул, Кишинёв – Гаага, Берлин – Кишинёв, Стамбул – Берлин, Стамбул – Москва, Рим – Будапешт, Рим – Стамбул, Рейкьявик – Москва, Москва - Кишинев, Гаага – Будапешт, Гаага - Рейкьявик.*

3) *Рим.*

4) Из *Рим* в *Стамбул* с *четырьмя* пересадками.

Вариант 3

1) Список городов: *Лондон, Люксембург, Женева, Минск, Берлин, Киев, Москва, Рим, Астана, Пекин.*

2) Лондон – Берлин, Женева – Астана, Женева –Минск, Люксембург – Пекин, Люксембург – Лондон, Минск – Пекин, Минск – Люксембург, Берлин - Киев, Киев – Астана,

Москва- Лондон, Москва – Пекин, Рим – Берлин, Астана – Лондон, Астана – Рим, Пекин – Москва, Пекин – Лондон.

3) *Москва.*

4) Из *Минска* в *Киев* с *тремя* пересадками.

Вариант 4

1) Список городов: *Дрезден, Люксембург, Франкфурт, Минск, Берлин, Милан, Москва, Рим, Вена, Мадрид.*

2) Минск – Берлин, Минск – Мадрид, Дрезден – Берлин, Дрезден – Люксембург, Люксембург – Дрезден, Вена – Минск, Дрезден – Мадрид, Франкфурт – Вена, Вена

– Рим, Франкфурт – Дрезден, Берлин – Франкфурт, Берлин – Рим, Милан – Вена, Москва - Дрезден, Рим – Франкфурт, Мадрид – Рим.

3) *Берлин.*

4) Из *Минска* в *Мадрид* с *четырьмя* пересадками.

Пример решения.

Фирма-поставщик располагает возможностью осуществлять бесплатные перелеты между городами:

Минск, Милан, Вильнюс, Мюнхен, Берлин, Киев, Рим, Варшава, Москва, Франкфурт;

перелеты между которыми заданы списком рейсов:

Минск – Милан, Милан – Рим, Вильнюс – Мюнхен, Мюнхен – Берлин, Берлин – Вильнюс, Берлин – Франкфурт, Киев – *Берлин, Киев – Москва, Рим – Минск, Варшава – Москва, Москва – Киев, Москва – Франкфурт, Франкфурт – Минск, Франкфурт – Киев, Франкфурт – Варшава.*

Необходимо: 1) построить матрицу смежности графа бесплатных перелетов; 2) построить промежуточные матрицы, отражающие возможности перевозок с одной, двумя, тремя, четырьмя, пятью пересадками и т.д.; 3) построить матрицу достижимости графа; по матрице достижимости определить города в которые фирма-поставщик может осуществлять перелеты из *Милана* бесплатно; 4) построить путь из *Мюнхена* в *Вильнюс* с *четырьмя* пересадками, если таковой имеется.

Решение. Решим задачу с помощью Excel.

1. Построим матрицу смежности графа $\boldsymbol{A}$, и введем две вспомогательные матицы слева.

Матрица смежности A		Минск	Милан	Вильнюс	Мюнхен	Берлин	Киев	Рим	Варшава	Москва	Франкфурт
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Минск	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Милан	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Вильню	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Мюнхен	4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Берлин	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Киев	6	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
Рим	7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Варшав	8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Москва	9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Франкф	10	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0

A_1=A										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
10	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0

A_1=A										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
10	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0

2. Построим матрицу *A*х*A*, перемножив вспомогательные матрицы A_1 и A_1 с помощью функции МУМНОЖ. Построим матрицу A2, показывающую наличие перелета с одной пересадкой, заменив в матрице AхA все элементы большие 1 на 1 с помощью функции ЕСЛИ.

Построим матрицу *A*х*A*х*A*, перемножив матрицу *A*х*A* и вспомогательную матрицу A_2 = A.

Рим	7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Варшав	8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Москва	9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Франкф	10	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0

7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
10	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0

7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
10	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0

A2 - наличие пути с одной пересадкой		Минск	Милан	Вильнюс	Мюнхен	Берлин	Киев	Рим	Варшава	Москва	Франкфурт
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Минск	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Милан	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Вильнюс	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Мюнхен	4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Берлин	5	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
Киев	6	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
Рим	7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Варшава	8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Москва	9	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
Франкфу	10	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0

Матрица AхA. Пермножаем матрицы A_1 и A_1 функцией **МУМНОЖ(O4:X13;AA4:AJ13)**										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
5	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	1	0	0	0	2
7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
9	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
10	0	1	0	0	1	0	0	0	2	0

A_2=A										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
10	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0

Матрица A2 получается заменой элементов матрицы AхA больших 0 на 1 функцией ЕСЛИ(элемет>1;1;элемент)

Затем построим матрицу A3, показывающую наличие перелета с двумя пересадками, заменив в матрице AхAхA все элементы большие 1 на 1.

По аналогии поострим матрицы A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, отвечающие соответственно за количество пересадок на единицу меньшее номера матрицы.

Киев	6	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
Рим	7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Варшава	8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Москва	9	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
Франкфу	10	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0

6	0	0	1	0	0	1	0	0	0	2
7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
9	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
10	0	1	0	0	1	0	0	0	2	0

6	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
10	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0

А3 - наличие пути с двумя пересадк.		Минск	Милан	Вильнюс	Мюнхен	Берлин	Киев	Рим	Варшава	Москва	Франкфурт
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Минск	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Милан	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Вильнюс	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Мюнхен	4	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
Берлин	5	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
Киев	6	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
Рим	7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Варшава	8	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
Москва	9	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
Франкфу	10	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1

Матрица АхАхА. Пермножаем матрицы АхА и А_2										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
4	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
5	0	1	0	0	2	0	0	0	2	0
6	2	0	0	1	1	2	0	2	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
9	0	1	1	0	1	1	0	0	2	2
10	0	0	1	0	0	2	1	0	0	3

А_3=А										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
10	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0

Матрица А3 получается заменой элементов матрицы АхАхА больших 0 на 1 функцией ЕСЛИ(элемент>1;1;элемент)

3. Далее построим матрицу достижимости D, найдя сумму матриц $D_s = E{+}A{+}A2{+}A3{+}A4{+}A5{+}A6{+}A7{+}A8{+}A9{+}A10$, и заменив в полученной матрице D_s элементы большие 1 на 1.

Элемент (i, j) матрицы достижимости D равный 1, показывает, что из города i в город j есть путь, равный 0 означает, что таковой отсутствует. Таким образом, из Милана фирма-поставщик может осуществить бесплатные перелеты в города Минск и Рим.

D		Минск	Милан	Вильнюс	Мюнхен	Берлин	Киев	Рим	Варшава	Москва	Франкфурт
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Минск	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
Милан	2	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
Вильнюс	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Мюнхен	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Берлин	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Киев	6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Рим	7	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
Варшава	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Москва	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Франкфу	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Ds										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	4	0	0	0	0	3	0	0	0
2	3	4	0	0	0	0	4	0	0	0
3	4	3	6	5	6	6	2	4	5	5
4	5	4	6	6	7	7	3	5	6	6
5	6	5	7	6	8	8	4	6	7	7
6	7	6	8	7	9	10	5	7	9	8
7	4	3	0	0	0	0	4	0	0	0
8	7	6	7	6	8	9	5	8	9	8
9	8	7	8	7	9	10	6	8	10	9
10	7	6	7	6	8	9	5	7	8	8

E										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

4. За путь с четырьмя пересадками из Мюнхена в Вильнюс отвечает матраца А5. Поскольку, на пересечении строки “Мюнхен” и столбца “Вильнюс” стоит 1, такой путь существует. Построим его.

По матрице *A* определяем, что из Мюнхена можно вылететь только в Берлин. Таким образом, осталось проложить маршрут из Берлина в Вильнюс с тремя пересадками. По матрице *A* определим, что из Берлина есть вылеты в Вильнюс и Франкфурт. Поскольку стоит задача добраться из Мюнхена в Вильнюс с четырьмя пересадками, перелёт Берлин-Вильнюс рассматривать не будем. С помощью матрицы *A3* убедимся что из Франкфурта в Вильнюс существует маршрут с двумя пересадками. Итак имеем:

Мюнхен – Берлин – Франкфурт – … – … – Вильнюс. По матрице *A* определяем, куда можно вылететь из Франкфурта: Минск, Киев, Варшава. По матрице *A2* проверяем наличие перелетов до Вильнюса с одной пересадкой для каждого из трех городов. Такой перелет возможен только для города Киева. Имеем:Мюнхен – Берлин – Франкфурт – Киев – … – Вильнюс.

Из Киева существуют перелеты в Берлин и Москву, однако перелет из Москвы в Вильнюс отсутствует. Таким образом получаем маршрут:

Мюнхен – Берлин – Франкфурт – Киев – Берлин – Вильнюс.

Тема 9. Основные распределения случайных величин.

Лабораторная работа 1. Биномиальное распределение (2 часа).

Цель: Научиться оешать практические задачи используя закон биномиального распределения биномиального.

Пример. Требуется подсчитать число изделий в партии фармакологического препарата, не соответствующих требованиям. Все причины, влияющие на качество препарата, принимаются одинаково вероятными и не зависящими друг от друга. Сплошная проверка качества в этой ситуации не возможна, поскольку изделие, прошедшее испытание, не подлежит дальнейшему использованию. Для контроля из партии наудачу выбирают определенное количество образцов изделий n. Эти образцы всестороннее проверяют и регистрируют число бракованных изделий k. Считают, что вероятность брака составляет $p = k / n$. 1) Найти вероятность того что из m, выбранных наудачу едениц препарата l окажутся браковаными; 2) найти вероятность того что из m, выбранных наудачу едениц препарата не более l окажутся браковаными; 3) найти вероятность того что из m, выбранных наудачу едениц препарата количество бракованных изделий будет превышать r, но окажктся меньшим l.

Биномиальное распределение применяется для вычисления вероятности в задачах с фиксированным числом тестов или испытаний, когда результатом любого испытания может быть только успех или неудача.

Воспользуемся функцией Exel **БИНОМРАСП (число_успехов; число_испытаний; вероятностъ_успеха; интегральная)**, где

число_успехов – количество успешных испытаний;

число_испытаний – число независимых испытаний;

вероятность_ успеха – это вероятность успеха каждого испытания;

интегральный – это логическое значение, определяющее форму функции.

Если данный параметр имеет значение **ИСТИНА** (=1), то считается интегральная функция распределения (вероятность того, что число успешных испытаний не менее значения *число_ успехов*); если этот параметр имеет значение **ЛОЖЬ** (=0), то вычисляется значение функции плотности распределения (вероятность того, что число успешных испытаний в точности равно значению аргумента *число_ успехов*).

Для решения в диалоговом окне **Мастер функций** выбираем **Статистическая → БИНОМРАСП**. В поле **число_успехов** вводим количество бракованных препаратов l, в поле **число_испытаний** – m. В поле **вероятностъ_успеха** вводим p. В поле **интегральная** вводим 0. В результате получаем вероятность того что из m, выбранных наудачу едениц препарата l окажутся браковаными. Для ответа на второй вопрос задачи в поле **интегральная** необходимо ввести 1. Вероятность того что из m, выбранных наудачу едениц препарата количество бракованных изделий будет превышать r, но окажктся меньшим l будет равно **БИНОМРАСП (*l*; *m*; *p*; 1) – БИНОМРАСП (*r*; *m*; *p*; 1)**

Задание. Провести опрос группы: Пошли бы вы на фильм __________(название фильма). Для опроса выбрать четыре фильма раличных жанров. Профком может оплатить студентам вашего факультета поход в кино. Вам нужно принять решение, основываясь на опросе группы, стоит ли в качестве такого фильма предлагать выбранный вами фильм, если ожидается, что на него должно пойти не менее 30% студентов факультета, но и не более 60%. Какова вероятность того, что на фильм пойдет 40% студентов. Построить закон распределения вероятностей для 40 студентов по четырем фильмам. Найти наивероятнейшее количество человек, которые пойдут на каждый из фильмов. Найти математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение, указав наивероятнийший интервал значений количества студентов, которые готовы пойти на каждый из фильмов. Для одного из фильмов построить функцию распределения случайной велисины – количества студентов, которые изъявят желание пойти на фильм.

Тема 10. Основные понятия математической статистики

Лабораторная работа 1. Описательная статистика (2 часа).

Цель: сформировать умение решения задач описательной статистики с помощью табличного редактора Microsoft Excel.

Задание. Тестирование прошли 4 526 человек. Произведено выборочное обследование балов 100 тестируемых, результаты которого приведены в таблице:

125+N	125+N	40+2N	90+N	30+2N	140+N	100+N	50+N	25+2N	145-N
135+N	125-N	85+N	125+N	35+2N	180-N	90+N	85+N	35+2N	190-N
125+N	140+N	200-2N	120+N	190-N	150+N	110+N	60+N	45+2N	160-N
135+N	125-N	45+N	125+N	30+2N	180-N	90+N	90+N	25+2N	170-N
150+N	100+N	40+2N	200-2N	125+N	45+2N	50+N	40+2N	60+N	145-N
180-N	90+N	85+N	45+N	135+N	25+2N	85+N	85+N	90+N	160-N
50+2N	125+N	40+2N	90+N	30+2N	140+N	100+N	50+2N	25+2N	185-2N
175-N	125-N	85+N	145+N	35+2N	180-N	90+N	85+N	35+2N	190-N
115+N	145+N	200-2N	20+3N	190-N	150+N	110+N	60+N	45+2N	165-N
105+N	130-N	45+N	25+3N	30+2N	180-2N	115+N	90+N	25+3N	170-N
150+N	170-N	40+2N	200-2N	125+N	45+2N	50+N	40+2N	60+N	155-N
180-N	95+N	85+N	45+N	135+N	25+2N	85+N	85+N	90+N	160-N

N – дополнительное число указаное преподавателем.

Используя Microsoft Excel выполнить следующие задания:

1. Составить вариационный ряд распределения.
2. Вычислить относительные частоты.
3. Построить полигон частот.
4. Используя формулы математической статистики вычислить статистические характеристики данного ряда: среднее значение, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану, асимметрию, эксцесс.
5. Выполнить пункт 4 с помощью модуля **Описательная статистика,** (**С**ервис→Анализ данных→Описательная статистика) имеющегося в пакете «Статистический анализ» MS Excel.
6. Проанализировать полученные данные.

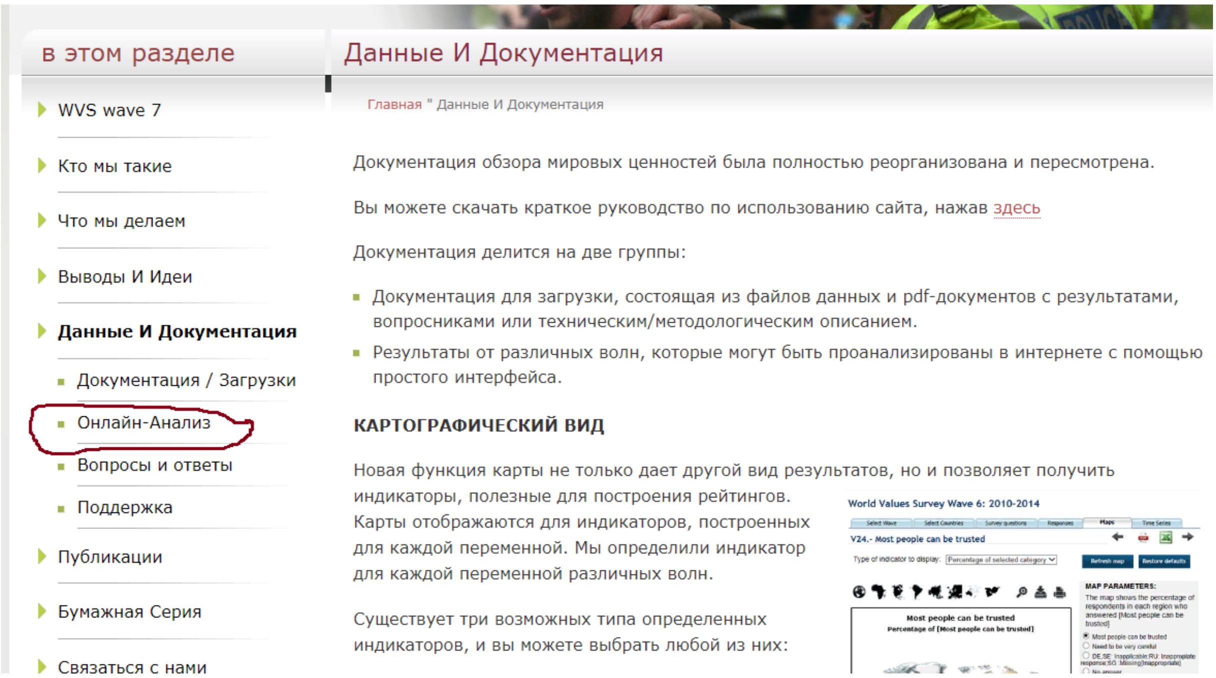
Лабораторная работа 2. Описательная статистика (2 часа).

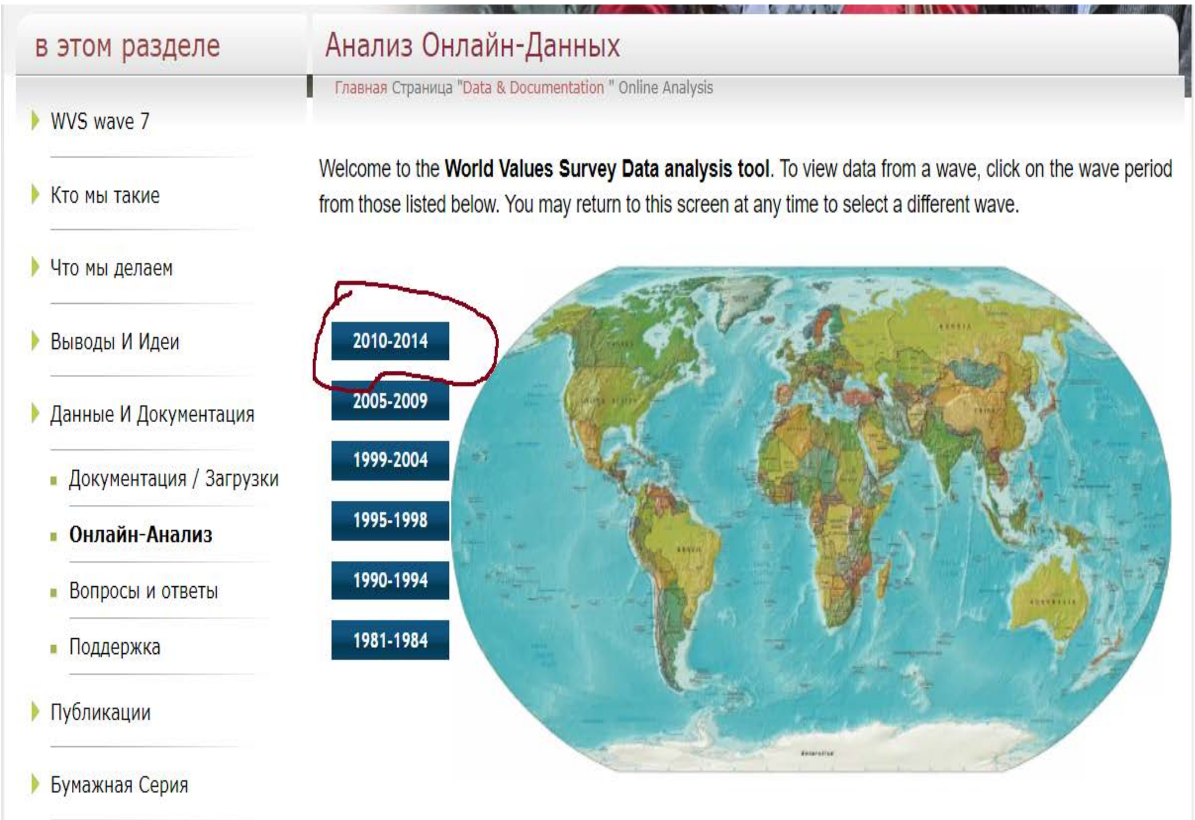
Цель: сформировать умение применения описательной статистики к анализу культурологических данных.

Задание. Вычислить средние значения, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану, асимметрию, эксцесс для данных удовлетворенности финансовым положением домохозяйства в беларуси в периоды (989-1993),(1994-1998), (2010-2014), использовав данные опроса World Values Survey (https://www.worldvaluessurvey.org). Сделать выводы.

Методические рекомендации.

Шаг 1. Открыть базу данных Мировых Ценностей. Войти во вкладку «онлайн-анализ», выбрать 6-ую волну исследований.





Шаг 2. Выбрать страну исследования и перейти к выбору вопроса, затем выбрать вкладку впеменные ряды.

в этом разделе

- WVS wave 7
- Кто мы такие
- Что мы делаем
- Выводы И Идеи
- Данные И Документация
  - Документация / Загрузки
  - **Онлайн-Анализ**
  - Вопросы и ответы
  - Поддержка
- Публикации
- Бумажная Серия
- Связаться с нами
- Announcements

Анализ Онлайн-Данных

Главная Страница "Data & Documentation " Online Analysis

World Values Survey Wave 6: 2010-2014

Select Wave | **Select Countries** | Survey questions | Responses | Maps | Time Series

Please choose the countries you want to compare. You can change selection at any time. Click [Survey questions] to browse the questions, [Select Wave] to change wave or any other tab to display results.

Next >>

☐ Algeria	☐ Argentina	☐ Armenia	☐ Australia
☐ Azerbaijan	☑ Belarus	☐ Brazil	☐ Colombia
☐ Cyprus	☐ Chile	☐ China	☐ Ecuador
☐ Egypt	☐ Estonia	☐ Georgia	☐ Germany
☐ Ghana	☐ Haiti	☐ Hong Kong	☐ India
☐ Iraq	☐ Japan	☐ Jordan	☐ Kazakhstan
☐ Kuwait	☐ Kyrgyzstan	☐ Lebanon	☐ Libya
☐ Malaysia	☐ Mexico	☐ Morocco	☐ Netherlands
☐ New Zealand	☐ Nigeria	☐ Pakistan	☐ Palestine
☐ Peru	☐ Philippines	☐ Poland	☐ Qatar
☐ Romania	☐ Russian Federation	☐ Rwanda	☐ Singapore
☐ Slovenia	☐ South Africa	☐ South Korea	☐ Spain
☐ Sweden	☐ Taiwan	☐ Thailand	☐ Trinidad and Tobago
☐ Tunisia	☐ Turkey	☐ Ukraine	☐ United States
☐ Uruguay	☐ Uzbekistan	☐ Yemen	☐ Zimbabwe

Онлайн-Анализ Данных

Главная страница"Данные и документация " Онлайн-анализ

Волновой Временной Ряд Обзора Мировых Ценностей

Выберите Волну | Выберите Страны | Вопросы для опроса | Ответы | Карты | **Временные ряды**

C006.- Удовлетворенность финансовым положением домохозяйства

	Беларусь		
	1989-1993	1994-1998	2010-2014
Недовольный	10%	28%	7%
2	6%	13%	8%
3	13%	19%	15%
4	11%	11%	12%
5	22%	17%	20%
6	11%	4%	16%
7	9%	4%	12%
8	10%	2%	6%
9	3%	1%	2%
Удовлетворенный	5%	1%	2%
Не знаю	1%	1%	0%
(N)	1,015	2,092	1,535

Шаг 3. Перенести данные в Excell, осуществить необходимые вычисления.

Тема 11. Основы фрактальной геометрии

Лабораторная работа 1. Алгоритмы построения фракталов (2 часа).

Цель: Изучить основные геометрические и динамические фракталы, а так же онлайн средства их генерации и построения.

Задание 1. С посощью ресурса http://bugman123.com/Fractals/index.html изучить возможности использования фракталов для создания объектов алгоритмичесого искусства.

Задание 2. С помощью ресурса https://sciencevsmagic.net/fractal/#0060,0180,3,1,0,1,5 построить 4 различных фрактала на основе кривой Коха.

Задание 3. С помощью ресурса http://nadin.miem.edu.ru/1111/3 построить 4 различных фрактала на основе фрактала Мандельброта.

Задание 4. С помощью ресурса http://nadin.miem.edu.ru/1111/3 построить 4 различных 3D фрактала.

Тема 12. Математические модели и их применение для решения задач сферы культуры

Лабораторная работа 1. Построение межотраслевого баланса (4 часа)

Цель: приобретение навыков построения межотраслевого баланса с помощью Excel.

Краткие теоретические сведения. Межотраслевой баланс (МОБ) - это макроэкономическая модель, отражающая производство и потребление продукции в отраслях и секторах экономики в стоимостном выражении. МОБ отражает производство, межотраслевые поставки и конечное потребление продукции, произведенной в отраслях в течение года. Межотраслевой баланс представляется в виде таблицы 1.1.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – объемы производства продукции n отраслей;

Xij – стоимость продукции i-ой отрасли, потреблённой в j-ой отрасли в течение года;

Y_i – объем потребления продукции i-ой отрасли в непроизводственной сфере;

Z_j – добавленная стоимость в j-ой отрасли, которая включает оплату труда, чистый доход, амортизацию.

Таблица межотраслевого баланса

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечный продукт Y	Валовой продукт X
	1	2	…	n		
1 2 … n	X_{11} X_{21} … X_{n1}	X_{12} X_{22} … X_{n2}	… … … …	X_{1n} X_{2n} … X_{nn}	Y_1 Y_2 … Y_n	X_1 X_2 … X_n
Добавленная стоимость	Z_1	Z_2	…	Z_n	$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j$	
Валовой продукт	X_1	X_2	…	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$

В межотраслевом балансе имеют место следующие балансовые соотношения:

$$
\begin{aligned}
&X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i, \quad i = 1,2,\ldots,n,\\
&Z_j = X_j - \sum_{i=1}^{n} X_{ij},\\
&\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j,\\
&\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j.
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Основу экономико-математической модели МОБ составляет матрица коэффициентов прямых затрат $A = (a_{ij})$.

Коэффициенты прямых затрат определяются по формулам:

$$a_{ij}=X_{ij}/X_j,\ i,j= 1,2,\ldots,n. \qquad (2)$$

Эти коэффициенты показывают, какое количество продукции i-ой отрасли необходимо для производства единицы валовой продукции j-ой отрасли.

Предполагается, что коэффициенты прямых затрат отражают технологию производства и не зависят от переменных X_{ij}, X_i, Y_j.

Из (2) следует, что

$$X_{ij} = a_{ij} X_{j.} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) получаем:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i \quad (4)$$

или в матричном виде:

$$X = AX + Y \quad (5)$$

Откуда следует:

$$Y = (E - A)\, X \quad (6)$$

$$X = (E - A)^{-1}\, Y.$$

Матрица $B = (E - A)^{-1}$ называется матрицей коэффициентов полных затрат, для ее существования необходимо, чтобы определитель матрицы (E - A) не был равен нулю. Элементы матрицы В имеют определённое экономическое содержание: (i, j) – й элемент представляет собой количество продукта i, в котором нуждается экономика для того, чтобы обеспечить поставку единицы товара j в качестве конечного продукта.

Система уравнений (4), (5), (6) называется статической моделью Леонтьева. С помощью этой системы можно решать три типа задач:

1) по заданным величинам валовых выпусков X_j надо определить объемы конечной продукции каждой отрасли Y_i и построить таблицу межотраслевого баланса;

2) по заданным величинам конечной продукции Y_i надо определить величинам валовых выпусков X_j каждой отрасли и построить таблицу межотраслевого баланса;

3) для нескольких отраслей заданы величины валовых выпусков X_j, а для остальных отраслей заданы величины конечной продукции Y_i, надо определить объемы конечной продукции первых отраслей и валовых выпусков вторых отраслей и построить таблицу межотраслевого баланса;

4) по матрице прямых затрат A найти матрицу полных затрат В.

Задание

1. По матрице коэффициентов прямых затрат A и вектору конечной продукции Y определить:

1) матрицу коэффициентов полных затрат $B = (E - A)^{-1}$;
2) вектор валовых выпусков X.

Построить таблицу межотраслевого баланса отчётного периода. Исходные данные по вариантам находятся в таблице ниже.

2. По вектору валовых выпусков $X_{пл}$ построить таблицу межотраслевого баланса планового периода.

Исходные данные по вариантам

Вариант	Матрица коэффициентов прямых затрат А	Вектор конечной продукции Y	Вектор валовых выпусков $X_{пл}$
B1	$A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$	$X_{пл}=\begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 900 \end{pmatrix}$
B2	$A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix} 500 \\ 150 \\ 300 \end{pmatrix}$	$X_{пл}=\begin{pmatrix} 400 \\ 500 \\ 900 \end{pmatrix}$
B3	$A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix} 400 \\ 250 \\ 150 \end{pmatrix}$	$X_{пл}=\begin{pmatrix} 600 \\ 700 \\ 800 \end{pmatrix}$
B4	$A=\begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix} 600 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$	$X_{пл}=\begin{pmatrix} 400 \\ 500 \\ 900 \end{pmatrix}$
B5	$A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix} 200 \\ 350 \\ 750 \end{pmatrix}$	$X_{пл}=\begin{pmatrix} 600 \\ 700 \\ 800 \end{pmatrix}$
B6	$A=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,4 \\ 0,3 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix} 350 \\ 400 \\ 550 \end{pmatrix}$	$X_{пл}=\begin{pmatrix} 400 \\ 500 \\ 900 \end{pmatrix}$
B7	$A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix} 800 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$	$X_{пл}=\begin{pmatrix} 600 \\ 700 \\ 800 \end{pmatrix}$
B8	$A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix} 700 \\ 450 \\ 250 \end{pmatrix}$	$X_{пл}=\begin{pmatrix} 400 \\ 500 \\ 900 \end{pmatrix}$
B9	$A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix} 100 \\ 400 \\ 900 \end{pmatrix}$	$X_{пл}=\begin{pmatrix} 600 \\ 700 \\ 800 \end{pmatrix}$
B10	$A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix} 900 \\ 700 \\ 450 \end{pmatrix}$	$X_{пл}=\begin{pmatrix} 400 \\ 500 \\ 900 \end{pmatrix}$

В11	$A=\begin{pmatrix}0,1 & 0 & 0,1\\ 0,1 & 0,6 & 0\\ 0,5 & 0,1 & 0,4\end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix}350\\ 100\\ 750\end{pmatrix}$	$X_{пл}=\begin{pmatrix}600\\ 700\\ 800\end{pmatrix}$
В12	$A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,3 & 0,1\\ 0,1 & 0,2 & 0\\ 0,3 & 0 & 0,4\end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix}500\\ 200\\ 450\end{pmatrix}$	$X_{пл}=\begin{pmatrix}600\\ 500\\ 900\end{pmatrix}$
В13	$A=\begin{pmatrix}0,2 & 0 & 0,1\\ 0,1 & 0,2 & 0,4\\ 0 & 0,1 & 0,2\end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix}200\\ 100\\ 750\end{pmatrix}$	$X_{пл}=\begin{pmatrix}400\\ 500\\ 900\end{pmatrix}$
В14	$A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,5 & 0,3\\ 0,1 & 0,3 & 0\\ 0 & 0,1 & 0,4\end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix}450\\ 200\\ 800\end{pmatrix}$	$X_{пл}=\begin{pmatrix}600\\ 700\\ 800\end{pmatrix}$
В15	$A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,4 & 0,1\\ 0,1 & 0,3 & 0\\ 0 & 0,2 & 0,4\end{pmatrix}$	$Y=\begin{pmatrix}700\\ 600\\ 550\end{pmatrix}$	$X_{пл}=\begin{pmatrix}400\\ 500\\ 900\end{pmatrix}$

Пример решения задачи.

Дана матрица коэффициентов прямых затрат *A* и вектор конечной продукции Y.

$$A=\begin{pmatrix}0,2 & 0 & 0,1\\ 0,1 & 0,1 & 0\\ 0,3 & 0,1 & 0,4\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}300\\ 200\\ 350\end{pmatrix}$$

Требуется определить:

1. Матрицу коэффициентов полных затрат $B=(E-A)^{-1}$.
2. Вектор валовых выпусков *X*.

Построить таблицу межотраслевого баланса.

Приведём пример решения задачи с помощью пакета EXCEL.

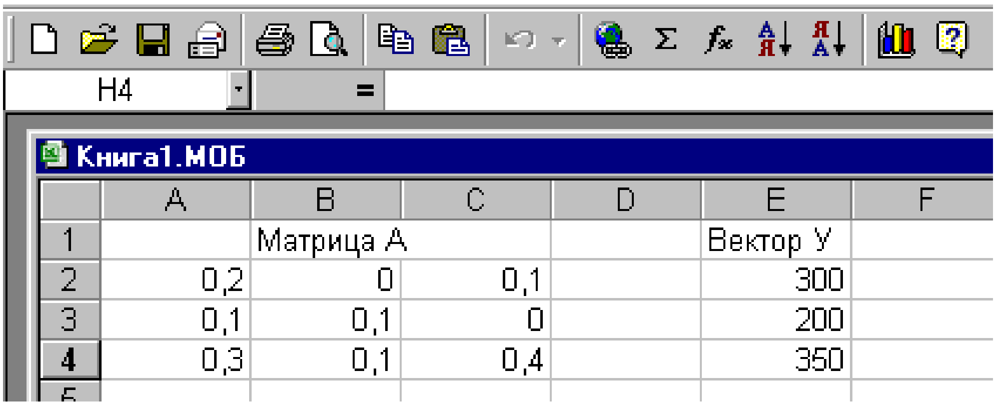
В Microsoft Excel есть функции, выполняющие операции с матрицами, которые можно использовать для решения задач по модели межотраслевого баланса. Для этой цели используются функции:

МУМНОЖ – умножение матриц;

МОБР – вычисление обратной матрицы.

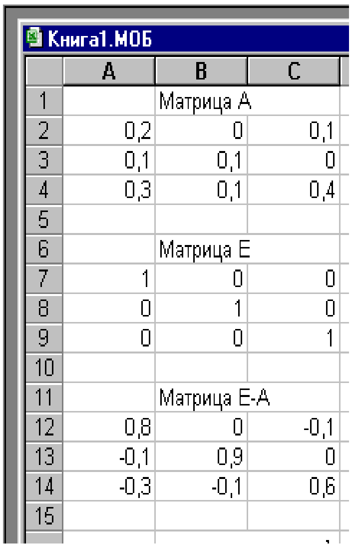
Для вызова этих функций служит кнопка «Мастер функций» ***fx***, расположенная на панели инструментов. Функции для выполнения операций с матрицами находятся в категории **математические**.

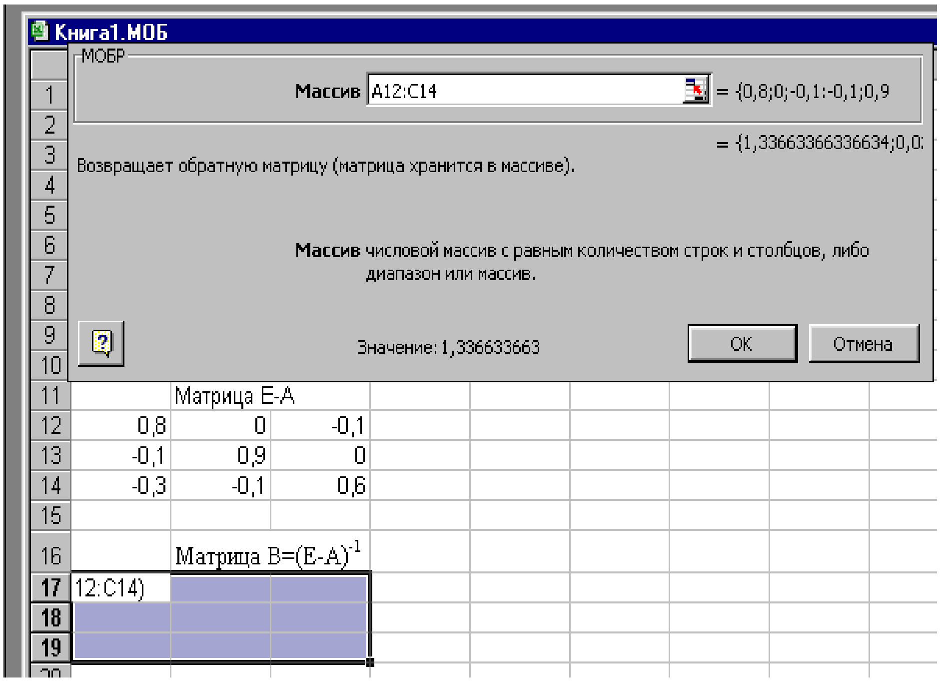
Итак, приступим к решению задачи. Исходные данные (матрицу коэффициентов прямых затрат А и вектор конечной продукции Y) введём в таблицу Excel.

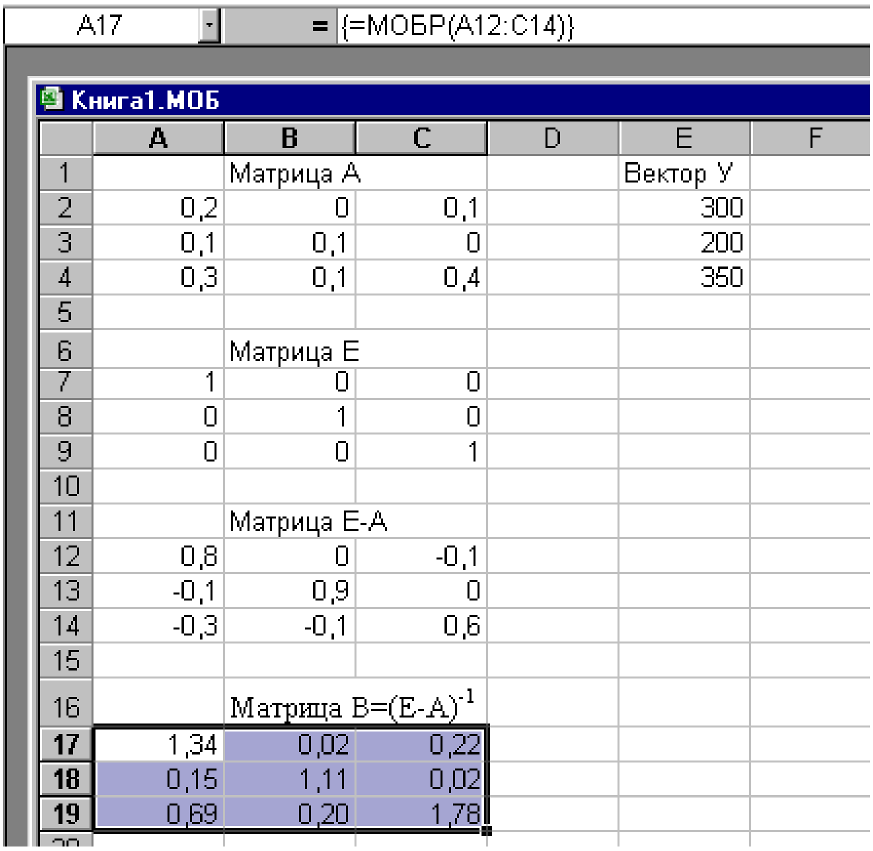


Найдём матрицу коэффициентов полных затрат $B = (E - A)^{-1}$. Для этого введём в таблицу Excel матрицу E, рассчитаем и введём матрицу E-A, а затем с помощью функции **МОБР** рассчитаем обратную ей матрицу $B = (E\text{-}A)^{-1}$

Для расчёта обратной матрицы $B = (E - A)^{-1}$ выполним следующие действия: выделим диапазон для возвращения результата (диапазон ячеек A17:C19 – таблицу матрицы B); придадим диапазону A17:C19 требуемый числовой формат, выбрав в меню **Формат►Ячейки** формат **Числовой** с числом десятичных знаков, равным 2; из вставки функции ***fx*** вызовем функцию **МОБР** из математических функций пакета; введём в нее массив (диапазон ячеек A12:C14 – матрицу E - A) и нажмём комбинацию клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER.**






A17 = {=МОБР(A12:C14)}

Книга1.МОБ

	A	B	C	D	E	F
1		Матрица А			Вектор У	
2	0,2	0	0,1		300	
3	0,1	0,1	0		200	
4	0,3	0,1	0,4		350	
5						
6		Матрица Е				
7	1	0	0			
8	0	1	0			
9	0	0	1			
10						
11		Матрица Е-А				
12	0,8	0	-0,1			
13	-0,1	0,9	0			
14	-0,3	-0,1	0,6			
15						
16		Матрица В=(Е-А)$^{-1}$				
17	1,34	0,02	0,22			
18	0,15	1,11	0,02			
19	0,69	0,20	1,78			

2. Рассчитаем вектор валовых выпусков X.

Для расчёта воспользуемся уравнением Леонтьева:

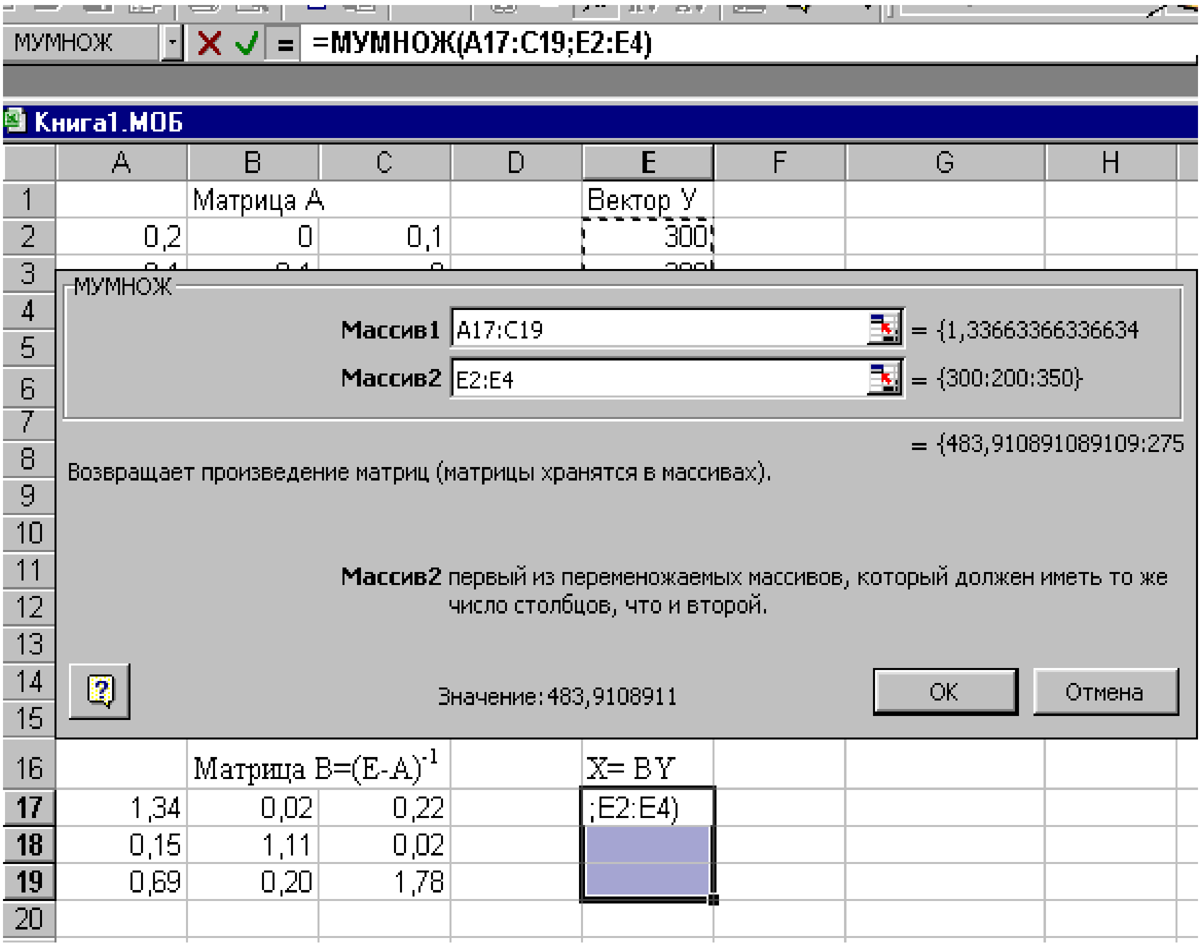
$$X=AX+Y.$$

Откуда следует:

$$X= (E-A)^{-1}\, Y = BY.$$

Итак, вектор валовых выпусков X находится в результате умножения матрицы коэффициентов полных затрат B на вектор конечной продукции Y.

Выполним следующие действия. В таблице Excel выделим диапазон для возвращения результата (диапазон ячеек E17:E19 – таблицу вектора X). Придадим диапазону E17:E19 требуемый числовой формат, выбрав в меню **Формат►Ячейки** формат **Числовой** с числом десятичных знаков, равным 1. Из вставки функции ***fx*** вызовем функцию **МУМНОЖ** из математических функций пакета. Введём в нее массивы 1 и 2 (диапазон ячеек A17:C19 – матрицу B и диапазон ячеек E2:E4 – вектор Y соответственно) (см. Рисунок5) и нажмём комбинацию клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER.** Результат показан на Рисунок6. По полученным значениям с помощью соотношений (1.3) и (1.1) строится таблица межотраслевого баланса.



3. Построим таблицу межотраслевого баланса.

На свободном месте рабочего листа создадим форму для построения таблицы межотраслевого баланса

В ячейки таблицы МОБ введём формулы, вычисляющие значения показателей МОБ. Для этого выполним следующие действия. Придадим диапазону H3:L7 требуемый числовой формат, выбрав в меню **Формат►Ячейки** формат **Числовой** с числом десятичных знаков, равным 1. В диапазон ячеек H3:J5 следует ввести формулы, вычисляющие стоимость продукции i-ой отрасли, потреблённой в j-ой отрасли в течение года: $X_{ij} = a_{ij} X_j$. Ввод формул см. в табл. 1.3. После ввода формулы в ячейку нажмите клавишу **OK.** В ячейке отобразится результат вычислений. В диапазон ячеек H6:J6 следует ввести формулы, вычисляющие добавленную стоимость в j-ой отрасли Z_j:

$$Z_j = X_j - \sum_{i=1}^{3} X_{ij}$$

Ввод формул см. в таблице 1. Причём достаточно ввести формулу в ячейку H6, а затем перетащить её в ячейки I6 и J6. Заполнение остальных ячеек формулами показано в табл. 1.

В итоге получаем таблицу межотраслевого баланса для данной задачи.

Таблица 1. Ввод формул, вычисляющих значения показателей МОБ.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3		
1	=A2*H7	=B2*H8	=C2*H9	=E2	=E17
2	=A3*H7	=B3*H8	=C3*H9	=E3	=E18
3	=A4*H7	=B4*H8	=C4*H9	=E4	=E19
Добавлен-ная	=H7-СУММ(H3:H5)	=I7-СУММ(I3:I5)	=J7-СУММ(J3:J5)	=СУММ(H6:J6)	
Валовой продукт	=E17	=E18	=E19		=СУММ(L3:J5)

Книга1.МОБ

	A	B	C	D	E	F
1		Матрица А			Вектор У	
2	0,2	0	0,1		300	
3	0,1	0,1	0		200	
4	0,3	0,1	0,4		350	
5						
6		Матрица Е				
7	1	0	0			
8	0	1	0			
9	0	0	1			
10						
11		Матрица Е-А				
12	0,8	0	-0,1			
13	-0,1	0,9	0			
14	-0,3	-0,1	0,6			
15						
16		Матрица $B=(E-A)^{-1}$			X= BY	
17	1,34	0,02	0,22		483,9	
18	0,15	1,11	0,02		276,0	
19	0,69	0,20	1,78		871,3	
20						

Книга1.МОБ

	G	H	I	J	K	L	M
1		Таблица межотраслевого баланса					
2	Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт	Валовый продукт	
3	1						
4	2						
5	3						
6	Добавленная стоимость						
7	Валовой продукт						
8							
9							

Книга1.МОБ

	G	H	I	J	K	L	M
1		Таблица межотраслевого баланса					
2	Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт	Валовый продукт	
3	1	96,8	0,0	87,1	300,0	483,9	
4	2	48,4	27,6	0,0	200,0	276,0	
5	3	145,2	27,6	348,5	350,0	871,3	
6	Добавленная стоимость	193,6	220,8	435,6	850,0		
7	Валовой продукт	483,9	276,0	871,3		1631,2	
8							
9							

Построить модель межотраслевого баланса трёхотраслевой экономической системы по матрице межотраслевых потоков и вектору конечного использования для условной экономики, состоящей из трёх отраслей, если за отчётный период известны межотраслевые потоки

$$\left(x_{ij\,отч}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 60 & 20 \\ 50 & 10 & 40 \\ 30 & 20 & 40 \end{pmatrix}$$

и вектор конечного использования

$$\overline{Y_{отч}}=\begin{pmatrix} 120 \\ 170 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Выполнить эконометрический анализ полученной модели:

1. Построить схему межотраслевого баланса за отчётный период.

2. Рассчитать плановый межотраслевой баланс при условии, что в плановом периоде известен валовый выпуск продукции

$$\overline{X_{пл}} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Привести числовую схему баланса.

3. Определить, каким должен быть валовый выпуск продукции отраслей в плановом периоде, если известен выпуск продукции для конечного использования

$$\overline{У_{пл}} = \begin{pmatrix} 160 \\ 180 \\ 110 \end{pmatrix}$$

4. Какое влияние в условиях рынка оказывает увеличение цены на продукцию отрасли 1 в 2 раза на изменение цен в других отраслях. Структуру затрат отчётного периода сформировать самостоятельно, исходя из того, что на заработную плату первой отрасли приходится 0,3%, второй отрасли – 0,35%, третьей отрасли – 0,35% валовой добавленной стоимости. Рост заработной платы отстаёт от роста цен, коэффициент эластичности заработной платы от цен составляет 0,7. Реальная динамика затрат в прогнозном периоде остаётся неизменной.

5. Какое влияние в условиях рынка оказывает увеличение зарплаты в отрасли 2 на 30% на увеличение цены продукции отраслей. Заработная плата в остальных отраслях остаётся неизменной.

Решение.

1. Построим схему межотраслевого баланса за отчётный период.

Распределение в отчётном периоде произведённой продукции на нужды текущего производственного и конечного потребления выражается системой уравнений:

$$x_{i\,отч} = \sum_{j=1}^{3} x_{ij\,отч} + y_{i\,отч}, \quad i = \overline{1,3}$$

Здесь $x_{i\,отч}$ - валовый выпуск i-той отрасли в отчётном периоде;

$\sum_{j=1}^{3} x_{ij\,отч}$ - промежуточное потребление в отчётном периоде;

$y_{i\,отч}$ - конечное использование в отчётном периоде.

Отсюда найдём вектор валового выпуска:

$$\overline{X_{отч}} = \begin{pmatrix} x_{1отч} \\ x_{2отч} \\ x_{3отч} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} x_{1j\,отч} + y_{1отч} \\ \sum_{j=1}^{3} x_{2j\,отч} + y_{2отч} \\ \sum_{j=1}^{3} x_{3j\,отч} + y_{3отч} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+60+20+120 \\ 50+10+40+170 \\ 30+20+40+90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 270 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Схема межотраслевого баланса за отчётный период имеет вид:

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Промежуточное потребление	Конечное использование	Валовый выпуск
	1	2	3			
1	$x_{11}=0$	$x_{12}=60$	$x_{13}=20$	$\sum_{j=1}^{3} x_{1j\,отч}=80$	$y_{1отч}=120$	$x_{1отч}=200$
2	$x_{21}=50$	$x_{22}=10$	$x_{23}=40$	$\sum_{j=1}^{3} x_{2j\,отч}=100$	$y_{2отч}=170$	$x_{2отч}=270$
3	$x_{31}=30$	$x_{32}=20$	$x_{33}=40$	$\sum_{j=1}^{3} x_{3j\,отч}=90$	$y_{3отч}=90$	$x_{3отч}=180$
Промежуточные затраты	$\sum_{i=1}^{3} x_{i1отч}=80$	$\sum_{i=1}^{3} x_{i2отч}=90$	$\sum_{i=1}^{3} x_{i3отч}=100$	$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{ij\,отч}=270$	$\sum_{i=1}^{3} y_{i\,отч}=38$	$\sum_{i=1}^{3} x_{i\,отч}=65$
Валовая добавленная стоимость	$v_{1отч}=120$	$v_{2отч}=180$	$v_{3отч}=80$	$\sum_{j=1}^{3} v_{j\,отч}=380$		
Валовый выпуск	$x_{1отч}=200$	$x_{2отч}=270$	$x_{3отч}=180$	$\sum_{j=1}^{3} x_{j\,отч}=650$		

2. Рассчитаем плановый межотраслевой баланс при условии, что в плановом периоде известен валовый выпуск продукции

$$\overline{X_{пл}} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Определим коэффициенты прямых затрат:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}$$

Вычисления оформим в виде матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0/200 & 60/270 & 20/180 \\ 50/200 & 10/270 & 40/180 \\ 30/200 & 20/270 & 40/180 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0{,}2222 & 0{,}1111 \\ 0{,}25 & 0{,}037 & 0{,}2222 \\ 0{,}15 & 0{,}0741 & 0{,}2222 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу «затраты-выпуск»:

$$(E-A)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0{,}2222 & 0{,}1111 \\ 0{,}25 & 0{,}037 & 0{,}2222 \\ 0{,}15 & 0{,}0741 & 0{,}2222 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -0{,}2222 & -0{,}1111 \\ -0{,}25 & 0{,}963 & -0{,}2222 \\ -0{,}15 & -0{,}0741 & 0{,}8888 \end{pmatrix}$$

Вектор конечного использования определим на основе балансового соотношения:

$$\overline{Y_{пл}}=(E-A)\overline{X_{пл}},$$

$$\overline{Y_{пл}}=\begin{pmatrix} 1 & -0{,}2222 & -0{,}1111 \\ -0{,}25 & 0{,}963 & -0{,}2222 \\ -0{,}15 & -0{,}0741 & 0{,}8888 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 233{,}34 \\ 73{,}16 \\ 117{,}94 \end{pmatrix}$$

Определим объёмы межотраслевых поставок по формуле

$$x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j,\ \ i=\overline{1{,}3},\ \ j=\overline{1{,}3}$$

Вычисления оформим в виде матрицы

$$\left(x_{ij\,пл}\right)=\begin{pmatrix} 0\cdot 300 & 0{,}2222\cdot 200 & 0{,}1111\cdot 200 \\ 0{,}25\cdot 300 & 0{,}037\cdot 200 & 0{,}2222\cdot 200 \\ 0{,}15\cdot 300 & 0{,}0741\cdot 200 & 0{,}2222\cdot 200 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 44{,}44 & 22{,}22 \\ 75 & 7{,}4 & 44{,}44 \\ 45 & 14{,}82 & 44{,}44 \end{pmatrix}$$

Приведём числовую схему баланса на плановый период

3. Определим, каким должен быть валовый выпуск продукции отраслей в плановом периоде, если известен выпуск продукции для конечного использования

$$\overline{Y_{пл}}=\begin{pmatrix} 160 \\ 180 \\ 110 \end{pmatrix}$$

Вектор валовой продукции определим на основе балансового соотношения:

$$\overline{X_{пл}}=(E-A)^{-1}\overline{Y_{пл}},$$

Найдём матрицу коэффициентов полных затрат $B=(E-A)^{-1}$. Для этого введём в таблицу Excel матрицу E-A, а затем с помощью функции **МОБР** рассчитаем обратную ей матрицу $B=(E-A)^{-1}$

$$B = \begin{pmatrix} 1{,}0979 & 0{,}2691 & 0{,}2045 \\ 0{,}3342 & 1{,}1407 & 0{,}3270 \\ 0{,}2132 & 0{,}1405 & 1{,}1869 \end{pmatrix}$$

Вектор валовой продукции в плановом периоде

$$\overline{X_{пл}} = \begin{pmatrix} 1{,}0979 & 0{,}2691 & 0{,}2045 \\ 0{,}3342 & 1{,}1407 & 0{,}3270 \\ 0{,}2132 & 0{,}1405 & 1{,}1869 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 160 \\ 180 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 246{,}6007 \\ 294{,}7645 \\ 189{,}9552 \end{pmatrix}$$

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечное использование	Валовы выпуск
	1	2	3		
1	0	44,44	22,22	233,34	300
2	75	7,4	44,44	73,16	200
3	45	14,82	44,44	95,74	200
Валовая добавленная стоимость	180	133,34	88,9	402,24	
Валовый выпуск	300	200	200		700

4. Определим, какое влияние в условиях рынка оказывает увеличение цены на продукцию отрасли 1 в 2 раза на изменение цен в других отраслях. Структуру затрат отчётного периода сформируем самостоятельно, исходя из того, что на заработную плату первой отрасли приходится 0,3%, второй отрасли – 0,35%, третьей отрасли – 0,35% валовой добавленной стоимости. Рост заработной платы отстаёт от роста цен, коэффициент эластичности заработной платы от цен составляет 0,7. Реальная динамика затрат в прогнозном периоде остаётся неизменной.

Валовая добавленная стоимость рассчитана в схеме межотраслевого баланса за отчётный период по формуле

$$ВДС_j = x_j - \sum_{i=1}^{3} x_{ij}, \quad j = \overline{1{,}3}$$

$ВДС_1 = 120$

$ВДС_2 = 180$

$ВДС_3 = 80$

Далее определяем заработную плату в отраслях:

$ЗП_1 = ВДС_1 \cdot 0{,}3 = 120 \cdot 0{,}3 = 40$

$ЗП_2 = ВДС_2 \cdot 0{,}35 = 180 \cdot 0{,}35 = 63$

$$ЗП_3 = ВДС_3 \cdot 0{,}35 = 80 \cdot 0{,}35 = 28$$

Первый и третий разделы отчётного МОБ имеют вид:

Балансовое соотношение для прогнозирования цен имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} p_i + \sum_{i=1}^{3} v_{ij} p_j = x_j p_j; \quad j = \overline{1,3},$$

где p_j – индекс цены i – той отрасли;

v_{ij} – i – й элемент добавленной стоимости j – той отрасли.

Величина затрат на продукцию первой отрасли не влияет на формирование цены в этой отрасли, поэтому система балансовых уравнений включает уравнение для второй и третьей отраслей.

$$\begin{cases} 60 \cdot 2 + 10 \cdot p_2 + 20 \cdot p_3 + p_2(63 \cdot 0{,}7 + 117) = 270 p_2 \\ 20 \cdot 2 + 40 \cdot p_2 + 40 \cdot p_3 + p_3(28 \cdot 0{,}7 + 52) = 180 p_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -98{,}9 p_2 + 20 \cdot p_3 = -120 \\ 40 p_2 - 68{,}4 \cdot p_3 = -40 \end{cases}$$

Решая систему, определим индексы цен в отраслях:

$p_2 = 1{,}5102$

$p_3 = 1{,}4680$

Таким образом, при увеличении цены в 1-ой отрасли в 2 раза, во 2-ой цена увеличится на 51,02%, в 3-ей на 46,80%.

5. Рассчитаем, какое влияние в условиях рынка оказывает увеличение зарплаты в отрасли 2 на 30% на увеличение цены продукции отраслей. Заработная плата в остальных отраслях остаётся неизменной.

Система балансовых уравнений:

$$\begin{cases} 0 \cdot p_1 + 50 \cdot p_2 + 30 \cdot p_3 + 40 + 80 \cdot p_1 = 200 \cdot p_1 \\ 60 \cdot p_1 + 10 \cdot p_2 + 20 \cdot p_3 + 1{,}3 \cdot 63 + 117 \cdot p_2 = 270 \cdot p_2 \\ 20 \cdot p_1 + 40 \cdot p_2 + 40 \cdot p_3 + 28 + 52 \cdot p_3 = 180 \cdot p_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -120 \cdot p_1 + 50 \cdot p_2 + 30 \cdot p_3 = -40 \\ 60 \cdot p_1 - 143 \cdot p_2 + 20 \cdot p_3 = -81{,}9 \\ 20 \cdot p_1 + 40 \cdot p_2 - 88 \cdot p_3 = -28 \end{cases}$$

Решая систему, определим индексы цен в отраслях:

$p_1 = 1{,}1089$

$p_2 = 1{,}1936$

$p_3 = 1{,}1127$

Таким образом, при увеличении зарплаты в отрасли 2 на 30%, в 1-ой отрасли цена на продукцию увеличилась на 10,89 %, во 2-ой - на 19,36%, в 3-ей - на 11,27%.

Задание

Для трёх отраслевой экономики известна матрица коэффициентов прямых материальных затрат (согласно варианту из задания лабораторной работы № 1 использовать межотраслевой баланс отчётного периода).

Определить, какое влияние в условиях рынка оказывает:

1) увеличение цены на продукцию 1-ой и 2-ой отраслей на (3+В)%, а коэффициент добавленной стоимости в 3-ю отрасль не изменился. Построить таблицу межотраслевого баланса расчётного периода 1;

2) увеличение цены на продукцию 1-ой отрасли на (4+В)%, а коэффициент добавленной стоимости в 3-ю отрасль не изменился. Построить таблицу межотраслевого баланса расчётного периода 2;

3) увеличение заработной платы во второй отрасли на (3+В)%, как изменятся цены на продукцию отраслей. Известно, что:

− на заработную плату в первой отрасли приходится (9+0,5В)% ВДС;

− на заработную плату во второй отрасли приходится (10+0,3В)% ВДС;

− на заработную плату в третьей отрасли приходится (11+0,2В)% ВДС.

Построить таблицу межотраслевого баланса расчётного периода 3. Здесь В = номер варианта

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Тема 2. Матрицы

Практическая работа 1. Операции над матрицами. Определить матрицы (2 часа).

Цель работы: Научиться выполнять основные действия над матрицами.

Задача 1. Найти линейную комбинацию матриц $A_{3\times3}$ и $B_{3\times3}$: (aA + bB). Транспонировать полученный результат. Матрицы $A_{3\times3}$ и $B_{3\times3}$ составляются произвольно из чисел от -15 до 15. Параметры a и b принимают значения -5 до 5.

Задача 2. Записать матрицу A размерности 4×4 и вектор B размерности 4×1 произвольно. Умножить матрицу A на вектор B.

Задача 3. Найти определитель матрицы $A_{3\times3}$ из задачи 1 разложением по строке либо столбцу.

Задача 4. Проверить результаты задач 1-3 с помощью онлайн калькулятора OnlineMschool на мобильном устройстве.

Тема 3. Линейные уравнения.

Практическая работа 1. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений (2 часа)

Цель работы: Овладеть методом Гаусса решения систем линейных уравнений.

Решетить методом Гаусса системы линейных уравнений.

Задача 1.

$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 18, \\ -7x_1 - 4x_2 - 4x_3 = -11, \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -15. \end{cases}$$

Задача 2.

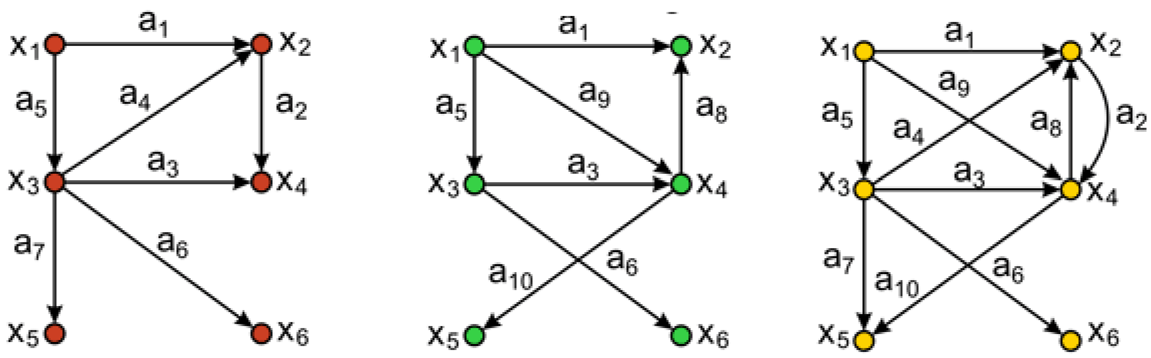
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 18, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Тема 4. Основные понятия теории графов.

Практическая работа 1. Матричное представление графов (2 часа).

Цель работы: Научиться решать задачи, с помощью графов, оперируя их графическим и матричным представлением.

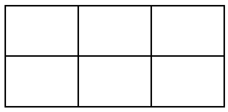
Задача 1. Записать матрицы смежностей инциденций и достижимости следующих графов.



Задача 2. Шахматный турнир проводится по круговой системе. Это означает, что каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. В турнире участвуют семь школьников. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя - пять, Леша и Дима - по три, Семен и Илья - по две, Женя - одну. С кем сыграл Леша? Решить задачу двумя способами, с помощью графического и матричного представления графа.

Задача 3. В соревновании по круговой системе с 5 участниками провели все встречи. Сколько встреч было сыграно? Нарисовать матрицу смежности графа, отображающую проведенные встречи

Задача 4. Какое наибольшее количество разрезов можно сделать в сетке (3×2) так, чтобы она не распалась? Какое количество нулей будет содержать матрица смежности графа, полученного в результате разреза.



Тема 5. Задачи оптимизации на графах.

Практическая работа 1. Нахождение минимальных путей в графе (2 часа).

Цель: Научиться решать задачи нахождения минимальных путей в графе с помощью алгоритма Дейкстры.

Задача. Задана матрица весов графа. Построить граф. Найти кратчайший путь из вершины 1 в вершину 9. Построить дерево минимальных путей. Построить матрицу смежности дерева минимальных путей.

Ниже приведены варианты матриц весов.

B1	s	1	2	3	4	t
s	∞	3	∞	3	∞	∞
2	∞	∞	1	4	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	7	2
4	∞	∞	2	∞	5	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	1
t	3	∞	∞	∞	∞	∞

B2	s	1	2	3	4	t
s	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	7	∞	4	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	8
4	∞	∞	9	∞	6	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	3
t	∞	∞	∞	5	∞	∞

B3	s	1	2	3	4	t
s	∞	3	∞	4	∞	∞
2	∞	∞	6	∞	4	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	8
4	∞	∞	3	∞	4	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	5
t	∞	∞	∞	2	∞	∞

B4	s	1	2	3	4	t
s	∞	3	5	3	∞	∞
2	∞	∞	4	7	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	4
4	∞	∞	∞	∞	3	∞
6	∞	∞	∞	6	∞	6
t	∞	∞	∞	∞	∞	∞

B5	s	1	2	3	4	t
s	∞	2	9	3	∞	∞
2	∞	∞	4	1	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	4
4	∞	∞	∞	∞	5	∞
6	∞	∞	∞	3	∞	6
t	∞	∞	∞	∞	∞	∞

B6	s	1	2	3	4	t
s	∞	6	7	8	∞	∞
2	∞	∞	4	3	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	4
4	∞	∞	∞	∞	3	∞
6	∞	∞	∞	2	∞	5
t	∞	∞	∞	∞	∞	∞

B7	s	1	2	3	4	t
s	∞	3	5	3	∞	∞
2	∞	∞	2	6	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	4
4	∞	∞	∞	∞	5	∞
6	∞	∞	∞	3	∞	3
t	∞	∞	∞	∞	∞	∞

B8	s	1	2	3	4	t
s	∞	2	6	3	∞	∞
2	∞	∞	3	5	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	4
4	∞	∞	∞	∞	2	∞
6	∞	∞	∞	3	∞	4
t	∞	∞	∞	∞	∞	∞

B9	s	1	2	3	4	t
s	∞	3	6	5	∞	∞
2	∞	∞	4	1	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	4
4	∞	∞	∞	∞	4	∞
6	∞	∞	∞	3	∞	2
t	∞	∞	∞	∞	∞	∞

B10	s	1	2	3	4	t
s	∞	9	2	3	∞	∞
2	∞	∞	4	1	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	4
4	∞	∞	∞	∞	4	∞
6	∞	∞	∞	7	∞	5
t	∞	∞	∞	∞	∞	∞

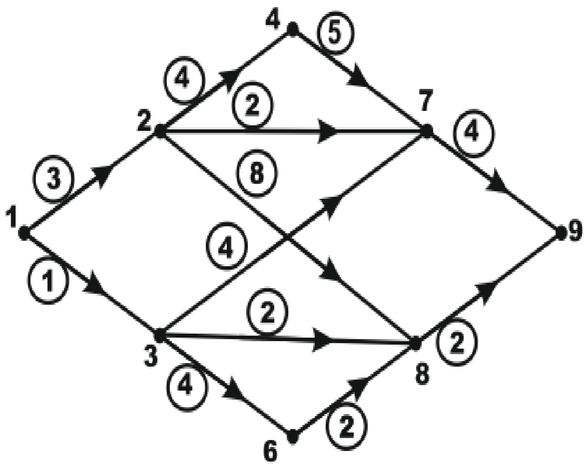
Пример решения

Пусть матрица весов имеет вид

.	1	2	3	4	6	7	8	9
1	∞	**3**$^+$	**1**$^+$	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	∞	**4**$^+$	∞	**2**$^+$	**8**	∞
3	∞	∞	∞	∞	**4**$^+$	**4**	**2**$^+$	∞
4	∞	∞	∞	∞	∞	**5**	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	**2**	∞
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	**4**
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	**2**$^+$
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Решение.

Построим граф. Граф содержит 8 вершин, пронумерованных 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Матрица весов P представляет собой таблицу, где строки и столбцы соответствуют номерам вершин, а элемент p_{ij} равен соответствующему весу дуги, если из вершины i в вершину j есть дуга и $p_{ij} = \infty$, если из вершины i в вершину j



нет дуги. Например если из вершины 1 в вершину 2 есть дуга, то на пересечении строки 1 и столбца 2 будет стоять вес соответствующей дуги, в нашем случае это 3; если из вершины 9 в вершину 8 нет дуги, то на пересечении строки 9 и столбца 8 будет стоять ∞.

Применим алгоритм Дейкстры

q_1=0, q_2=∞, q_3=∞, q_4=∞, q_5=∞, q_6=∞, q_7=∞, q_8=∞, q_9=∞.

I. $i = 1$. Помечаем вершину 1 (на первом шаге i равно номеру вершины из которой ищутся минимальные пути в нашем случае 1)

Пересчитываем q_j для непомеченных вершин по формуле:

$$q_j = \min\{ q_j, q_i + p_{ij}\}$$

$q_2 = \min\{q_2, q_1 + p_{12}\} = \min\{\infty, 0+3\}=3$,

$q_3 = \min\{q_3, q_1 + p_{\underline{13}}\} = \min\{\infty, 0+1\}=1,$

$q_4 = \min\{q_4, q_1 + p_{14}\} = \min\{\infty, 0+\infty\}=\infty,$

$q_6 = \min\{q_6, q_1 + p_{16}\} = \min\{\infty, 0+\infty\}=\infty,$

$q_7 = \min\{q_7, q_1 + p_{17}\} = \min\{\infty, 0+\infty\}=\infty,$

$q_8 = \min\{q_8, q_1 + p_{18}\} = \min\{\infty, 0+\infty\}=\infty,$

$q_9 = \min\{q_6, q_1 + p_{19}\} = \min\{\infty, 0+\infty\}=\infty.$

j_{min} – индекс, на котором достигается $\min\{q_j\}$ (то есть выбираем самое маленькое q_j и запоминаем его номер. В нашем случае это $\min\{q_j\}=q_3=1$, запоминаем номер $j_{min}=3$. Помечем дугу (1, 3) в таблице весов знаком “+”. И помечаем вершину 3. Таким образом, имеем две помеченных вершины {1; 3}.

II. $i= j_{min}=3$, $q_3=1$. Пересчитываем q_j для непомеченных вершин:

$q_2 = \min\{q_2, q_3 + p_{32}\} = \min\{3, 1+\infty\}=3,$

$q_4 = \min\{q_4, q_3 + p_{34}\} = \min\{\infty, 1+\infty\}=\infty,$

$q_6 = \min\{q_6, q_3 + p_{36}\} = \min\{\infty, 1+4\}=5,$

$q_7 = \min\{q_7, q_3 + p_{37}\} = \min\{\infty, 1+4\}=5,$

$q_8 = \min\{q_8, q_3 + p_{\underline{38}}\} = \min\{\infty, 1+2\}=3,$

$q_9 = \min\{q_9, q_3 + p_{39}\} = \min\{\infty, 1+\infty\}=\infty.$

Выбираем самое маленькое q_j и запоминаем его номер: $\min\{q_j\}=q_8=3$, запоминаем номер $j_{min}=8$. Помечем дугу (3, 8) в таблице весов знаком “+”. Помечаем вершину 8. Таким образом, множество помеченных вершин имеет вид {1; 3; 8}.

III. $i= j_{min}=8$, $q_8=3$. Пересчитываем q_j для непомеченных вершин:

$q_2 = \min\{\underline{\boldsymbol{q_2}}, q_8 + p_{82}\} = \min\{\boldsymbol{3}, 3+\infty\}=3,$

$q_4 = \min\{q_4, q_8 + p_{84}\} = \min\{\infty, 3+\infty\}=\infty,$

$q_6 = \min\{q_6, q_8 + p_{86}\} = \min\{5, 3+\infty\}=5,$

$q_7 = \min\{q_7, q_8 + p_{87}\} = \min\{5, 3+\infty\}=5,$

$q_9 = \min\{q_9, q_8 + p_{89}\} = \min\{\infty, 3+2\}=5.$

Выбираем самое маленькое q_j и запоминаем его номер: $\min\{q_j\}=q_2=3$, запоминаем номер $j_{min}=2$. Помечаем дугу (1, 2) – дуга на которой было достигнуто значение $q_2=3$ (в нашем случае оно было достигнуто на I-ом шаге на дуге (1,2)) в таблице весов знаком “+”. Помечаем вершину 2, добавляя ее к списку помеченных вершин {1; 3; 8, 2}.

IV. $i= j_{min}=2$, $q_2=3$. Пересчитываем q_j для непомеченных вершин:

$q_4 = \min\{q_4, q_2 + p_{24}\} = \min\{\infty, 3+4\}=7,$

$q_6 = \min\{q_6, q_2+ p_{26}\} = \min\{5, 3+\infty\}=5,$

$q_7 = \min\{q_7, q_2 + p_{\underline{27}}\} = \min\{5, 3+2\}=5,$

$q_9 = \min\{q_9, q_2+ p_{29}\} = \min\{5, 3+\infty\}=5.$

Выбираем самое маленькое q_j. Поскольку мы имеем дело с тремя одинаковыми значениями, можем выбрать одно из них, кроме q_9 , поскольку вершина 9 конечна. И так как на вершине 9 достигнуто одно из минимальных значений q_9=5, то на этом шаге мы можем построить минимальный путь из вершины 1 в вершину 9: (1, 3) → (3, 8) → (8, 9) и включить вершину 9 в список помеченных вершин

Выберем $\min\{q_j\}=q_7=5$, запоминаем номер $j_{min}=7$. Помечаем дугу (2, 7) в таблице весов знаком “+”. Помечаем вершину 7, добавляя ее к списку помеченных вершин {1; 3; 8; 2; 7; 9}.

V. $i= j_{min}=7$, $q_7=5$. Пересчитываем q_j для непомеченных вершин:

$q_4 = \min\{q_4, q_7 + p_{74}\} = \min\{7, 5+\infty\}=7$,

$q_6 = \min\{\underline{\mathbf{q_6}}, q_7+ p_{76}\} = \min\{5, 5+\infty\}=5$.

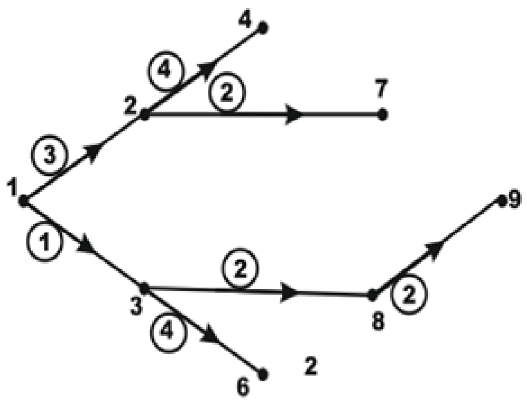
Выберем $\min\{q_j\}=q_6=5$, запоминаем номер $j_{min}=5$. Помечаем дугу (3, 6) в таблице весов знаком “+”. Помечаем вершину 6, добавляя ее к списку помеченных вершин {1; 3; 8; 2; 7; 6; 9}.

VI. $i= j_{min}=6$, $q_6=5$. Пересчитываем q_j для непомеченных вершин:

$q_4 = \min\{\mathbf{q_4}, q_7 + p_{74}\} = \min\{7, 5+\infty\}=7$,

Помечаем дугу (2, 4) в таблице весов знаком “+”. Помечаем вершину 4, добавляя ее к списку помеченных вершин {1; 3; 8; 2; 7; 6; 4; 9}. Таким образом, мы пометили все вершины.

Прорисовываем все дуги, отмеченные в таблице весов знаком “+” получим дерево минимальных путей рассматриваемого графа. Матрица смежности минимальных путей будет иметь вид



	1	**2**	**3**	**4**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	1	0	0
3	0	0	0	0	1	0	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0

Тема 6. Основные понятия теории вероятности

Практическая работа 1. События и операции над ними (2 часа).

Цель: Изучить виды событий и операции над ними

Задача 1. Найдите сумму событий:

а) испытание – два выстрела по мишени; события: А – «попадание первым выстрелом», В – «попадание вторым выстрелом»;

б) испытание – бросание игральной кости; события: А – «появление одного очка», В – «появление двух очков», С – «появление трех очков»;

в) испытание – приобретение лотерейных билетов; события: А – «выигрыш 10 рублей», В – «выигрыш 20 рублей», С – «выигрыш 25 рублей».

Задача 2. Найдите произведение событий:

а) испытание – два выстрела по мишени; события: А –«попадание первым выстрелом», В – «попадание вторым выстрелом»;

б) испытание – бросание игральной кости; события: А – «непоявление трех очков», В – «непоявление пяти очков»; С – «появление нечетного числа очков».

Задача 3. При бросании игральной кости обозначим событие «появление двух очков» как А, «появление одного очка» – В и «появление трех очков» – С. Найдите событие: а) А+В+С; б) АВС; в) АВ+С; г) А+ВС; д) А(В+С)+В.

Ответ выберите из списка: а) невозможное событие; б) «появление одного очка»; в) «появление трех очков»; г) «появление двух очков»; д) «появление не более трех очков».

Задача 4. Пусть А, В и С – случайные события, выраженные подмножествами одного и того же множества элементарных событий. Используя операции сложения и умножения, запишите следующие события: а) произошло только событие А; б) произошло одно и только одно из данных событий; в) произошло два и только два из данных событий; г) произошли все три события; д) произошло хотя бы одно из данных событий.

Ответ выберите из приведенного списка: а) А+В+С; б) АВС; в) $A\overline{B}\overline{C}$; г) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$; д) $AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C$.

Тема 7. Операции над вероятностями.

Практическая работа 1. Вычисление вероятности (2 часа)

Цель: нучиться вычислять вероятность.

Задача 1. В коробке 100 шаров, помеченных номерами 1, 2, …, 100. Из коробки наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара содержит цифру 5?

Задача 2. В коробке 9 белых и 6 черных шаров. Из коробки вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

Задача 3. В партии из 8 деталей имеется 6 стандартных. Найдите вероятность того, что среди взятых наугад деталей ровно три стандартных.

Задача 4. Восемь различных книг расставляются наугад на одной полке. Найдите вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

Задача 5. В книжном магазине на полке 10 различных книг, причем 5 книг стоят по 4 рубля каждая, 3 книги – по одному рублю и две книги – по 3 рубля. Найдите вероятность того, что взятые наугад две книги стоят 5 рублей.

Задача 6. Оля и Коля договорились встретить Новый год в компании десяти человек. Они оба хотели сидеть за праздничным столом рядом. Найдите вероятность исполнения их желания, если среди друзей принято места распределять по жеребьевке.

Задача 7. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна 8; б) произведение выпавших очков равно 8; в) сумма выпавших очков больше, чем их произведение; г) сумма выпавших очков меньше, чем их произведение; д) сумма выпавших очков равна их произведению.

Ответ выберите из списка: а) 11/36; б) 1/36; в) 5/36; г) 1/18; д) 2/3.

Практическая работа 2. Сложение, умножение вероятностей. Формула полной вероятности (2 часа).

Цель: научиться решать задачи на нахождение вероятности с применением правил сложения, умножения вероятностей и формулы полной вероятности.

Задача 1. Лаборатория получает изделия от заводов A, B и C. Вероятность поступления изделий от завода A равна 0,35, от завода B – 0,4. Найти вероятность того, что очередная партия изделий поступит от завода C.

Задача 2. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найти вероятность р того, что в цель попадет хотя бы один стрелок.

Задача 3. Инженер центра информационных состояний отвечает за исправное состояние компьютеров в трех лабораториях вычислительной техники кафедры информационных технологий в культуре. Вероятность того, что в течение дня потребует внимания 1-я лаборатория, равна 0,5; 2-я лаборатория – 0,6; 3-я лаборатория – 0,8. Найдите вероятности следующих событий: а) «ни одна лаборатория в течение дня не потребует внимания инженера»; б) «1-я лаборатория потребует внимания инженера, а 2-я и 3-я нет»; в) «1-я и 2-я лаборатория потребует внимания инженера, а 3-я нет»; г) «хотя бы одна из лабораторий потребует внимания инженера в течение дня»; д) «не более одной лаборатории потребуется внимание инженера».

Задача 4. На кафедру информационных технологий в культуре поступают контрольные работы по дисциплине «Основы высшей математики» от студентов 108, 111 и 112 группы факультета заочного обучения. Вероятность поступления контрольных работ от 108 группы равна 0,42, от 111 группы – 0,3. Найдите вероятность поступления контрольных работ от 112 группы.

Задача 5. Найдите вероятность выпадения: а) 3 гербов при подкидывании 3 монет; б) 4 цифр при подкидывании 4 монет; в) 2 очков при бросании игральной кости; г) 2 или 12 очков при бросании 2 игральных костей; д) 2 или 3 очков при бросании 2 игральных костей.

Ответ выберите из приведенного списка:

а) $\frac{1}{18}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{1}{16}$; д) $\frac{1}{36}$.

Задача 6. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 20%, второй – 46%, третьей – 34%. Известно, что процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй – 2%, для третьей – 1%. Найдите вероятность того, что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на первой фабрике.

Задача 7. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 90% случаев. Какова вероятность того, что из 5 больных поправится не менее 4 ?

Задача 8. В квартире шесть электрических лампочек. Вероятность того, что каждая лампочка останется исправной в течение года, равна 5/6. Найдите вероятность того, что в течение года придется заменить две лампочки.

Задача 9. Вероятность попадания в мишень одним выстрелом равна 1/5. Найдите вероятность того, что из десяти выстрелов не будет ни одного попадания.

Задача 10. На факультете культурологии и социокультурной деятельности имеются 4 проектора. Вероятность того, что каждый проектор останется исправным в течение года, равна 3/4. Найдите вероятность того, что в течение года: а) все 4 проектора выйдут из строя; б) ни один проектор не выйдет из строя; в) выйдет из строя хотя бы один проектор; г) выйдет из строя не более 2 проекторов; д) выйдет из строя не менее 2 проекторов.

Ответ выберите из списка: а) 67/256; б) 1/256; в) 81/256; г) 175/256; д) 243/256.

Тема 8. Дискретная случайная величина

Практическая работа 1. Математическое ожидание, дисперсия среднеквадратическое отклонение случайной величины (2 часа).

Цель: научиться вычислять математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины.

Задача1. Закон распределения дискретной случайной величины X задан следующей таблицей:

X	-2	-1	1	3
p	0,1	0,27	0,34	0,29

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Задача 2. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 8 и 5. Найдите вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10;20).

Задача 3. Найдите дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	0	1	2	3	4
p	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Задача 4. Значения дискретной случайной величины X образованы количеством очков при бросании 4 игральных костей. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Задача 5. Чему равно математическое ожидание количества: а) гербов при бросании 3 монет; б) очков при бросании 2 игральных костей; в) гербов при бросании 2 монет; г) гербов при бросании 4 монет; д) очков при бросании 3 игральных костей.

Ответ выберите из списка: а) 7; б) 1; в) 2; г) 1,5; д) 10,5.

Тема 11. Основы фрактальной геометрии

Практическая работа 1. Комплексные числа и действия над ними (2 часа).

Цель: Научиться выполнять основные арифметические действия с комплексными числами.

Задача 1. Даны числа $Z_1 = a_1 + b_1 i$ и $Z_2 = a_2 + b_2 i$. Найти 1) сумму чисел двух чисел $Z_1 + Z_2$; 2) разность двух чисел $Z_1 - Z_2$; 3) произведение чисел $Z_1 Z_2$; 4) отношение двух чисел Z_1 / Z_2; 5) найти абсолютные значения чисел Z_1 и Z_2. Изобразить сумму и разность двух комплексных чисел в виде суммы и разности соответствующих векторов в декартовой системе координат координат.

Задача 2. Вычислить и изобразить на координатной плоскости четыре первых члена последовательности $z_{n+1} = z_n^2 + c$, где $c = Z_1$

Варианты значений a_1, b_1, a_2, b_2:

Номер вар.	a_1	b_1	a_2	b_2
1	1	-2	3	-1
2	2	1	-3	1
3	1	-2	4	1
4	-2	4	1	3
5	-3	1	2	1
6	2	-3	1	-2
7	3	-2	-2	3
8	1	-4	1	-1
9	2	-1	3	2
10	1	-3	2	-3

Тема 12. Математические модели и их применение для решения задач сферы культуры

Практическая работа 1. Общие понятия теории матричных игр (2 часа)

Цель: Изучить общие понятия теории матричных игр.

Задание

Пользуясь материалом приведенным в данном разделе, а так же источниками интернет, изучить основные понятия теории игр и дать ответить на следующие вопросы:

1. Классификация игр. Примеры.
2. Стратегии игр и их классификация.
3. Основные модели матричных игр. Примеры.
4. Методы решения матричных игр

Теория игр занимается разработкой различного рода рекомендаций по принятию решений в условиях конфликтной ситуации. Формализуя конфликтные ситуации из которых преследует цель максимизации своего выигрыша за счет другого игрока. Иногда теорию игр определяют как раздел математики, занимающийся выработкой оптимальных правил поведения для каждой стороны, участвующей в конфликтной ситуации. Совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий стороны в конкретной конфликтной ситуаций, есть *стратегия.*

Под термином «игра» понимается совокупность предварительно оговоренных правил и условий, а термин «партия» связан с частичной возможной реализацией этих правил. Если n партнеров (игроков) $P_1, P_2,..., P_n$ участвуют в данной игре, то основное содержание теории игр состоит в изучении следующей проблемы: как должен вести партию j-й партнер $(j=\overline{1,n})$ для достижения наиболее благоприятного для себя исхода?

В дальнейшем предполагается, что в конце партии каждый игрок P_j получает сумму v_j, называемую *выигрышем*. При этом подразумевается, что каждый игрок руководствуется лишь целью максимизации общей суммы выигрыша. Числа v_j $(j=\overline{1,n})$ могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Если $v_j>0$, то это соответствует выигрышу j-го игрока, если $v_j<0$,- проигрышу, при $v_j=0$ - ничейный исход.

В большинстве случаев имеем игры с нулевой суммой, т.е. $v_1+v_2+...+v_n=0$. В этих играх сумма выигрыша переходит от одного партнера к другому, не поступая из внешних источников. Игра с нулевой суммой предусматривает, что сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю. Примерами игры с нулевой суммой служат многие экономические задачи. В них общая сумма выигрыша перераспределяется между игроками, но не меняется. В противном случае имеем игру с ненулевой суммой.

Игры, в которых участвуют два игрока, называются *парными,* а игры с большим числом участников – *множественными*.

Если два игрока в парной игре сознательно стремятся добиться для себя наилучшего результата, то такая игра называется *стратегической*. А возможные действия игроков называются их *чистыми стратегиями*.

Шахматы являются стратегической игрой двух партнеров с конечным числом личных ходов. В дальнейшем мы будем рассматривать игры двух партнеров с нулевой суммой и конечным числом возможных ходов. Такие игры математически глубоко проработаны и вызывают наибольший интерес, поскольку чаще используются в практических приложениях.

В зависимости от количества стратегий игры делятся на *конечные* и *бесконечные.* Так, в конечной игре каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, то игра называется бесконечной.

В зависимости от взаимоотношений игроков игры делятся на *кооперативные, коалиционные* и *бескоалиционные*. Если игроки не имеют права вступать в соглашения, то такая игра относится к бескоалиционным, если же игроки могут вступать в соглашения, создавать коалиции,– к коалиционным. Кооперативная игра – это такая игра, в которой заранее, определены коалиции.

В зависимости от вида функции выигрышей игры подразделяются на *матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные* и т. д. Обратимся к примерам простейших матричных игр.

Игра в три пальца. Игроки A и B одновременно и независимо друг от друга показывают 1, 2 или 3 пальца. Размер выигрыша определяется общим количеством показанных пальцев. При этом, если число пальцев четное, выигрывает игрок A, нечетное,– игрок B.

Такую игру двух игроков можно представить в виде матрицы

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

где индекс i элементов a_{ij} ($i = j$=1, 2, 3) означает количество пальцев игрока A, а индекс j - количество пальцев игрока B.

В общем случае матричная игра задается прямоугольной матрицей размерности m×n. Номер i строки матрицы соответствует номеру стратегии A_i, применяемой игроком A. Номер j столбца соответствует стратегии B_j, применяемой игроком B.

Каждый элемент a_{ij} матрицы является действительным числом и представляет собой сумму выигрыша, уплачиваемую игроком B игроку A, если A выбирает стратегию, соответствующую i-й строке, а B выбирает стратегию, соответствующую j-му столбцу. Выбирается пара стратегий (A_i , B_j), которая определяет *исход игры* a_{ij}.

Матричную игру часто записывают в виде *платежной матрицы*.

Таблица 1

	B_1	…	B_j	…	B_n	a_i
A_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}	i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	m
β_j	β_1	…	β_j	…	β_n	

$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$ - минимально возможный выигрыш игрока A, применяющего стратегию A_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$,

$\beta_i = \max\limits_i a_{ij}$ - максимально возможный проигрыш игрока B, применяющего стратегию B_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$.

Нижняя чистая цена игры (максимин) $\alpha = \max_{i} \alpha_{i} = \max_{i} \min_{j} a_{ij}$. (1)

Верхняя чистая цена игры (минимакс) $\beta = \min_{j} \beta_{j} = \min_{j} \max_{i} a_{ij}$. (2)

Стратегии игроков, соответствующие максимину (минимаксу), называются *максиминными (минимаксными)*.

Теорема 1. *В матричной игре нижняя чистая цена игры не превосходит верхней чистой цены игры, т.е.* $\alpha \le \beta$.

Если для чистых стратегий A_i, B_j игроков A и B соответственно имеет место равенство $\alpha=\beta$, то пару чистых стратегий (A_i, B_j) называют *седловой точкой матричной игры*, элемент a_{ij} матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца - *седловым элементом платежной матрицы*, а число $v=\alpha=\beta$ - чистой ценой игры. Стратегии A_{i*}, B_{j*} в этом случае являются оптимальными, а *решением игры* является совокупность оптимальных стратегий и цены игры, т. е. тройка (A_{i*}, B_{j*}, v).

Практическая работа 2. Простейшие матричные игры (2 часа)

Цель: Научиться находить решения простейших матричных игр и применять их для моделирования процессов сферы культуры.

Задание. Найти решение матричной игры. При отсутствии седловой точки изменить данные матрицы так, чтобы игра имела решение. Привести примеры производственных задач сферы культуры, где возможно было бы воспользоваться моделью матричных игр.

6	11	-1	9	14
16	3	-7	-4	5
0	14	-10	11	18
-6	11	5	2	7
-4	-1	-2	2	-11

-8	-6	-5	-2	-11
-4	-7	0	-3	2
4	-1	5	12	5
-4	8	2	9	9
3	5	-5	10	1

-7	4	12	8	4
-3	11	-5	-5	-3
5	13	9	2	7
15	0	3	10	0
4	3	8	9	-1

-1	8	-5	15	20
3	-1	4	-4	-8
-12	9	-1	3	9
4	2	2	-1	11
3	-12	12	5	20

12	-6	21	-11	4
7	12	14	7	4
1	14	6	-6	-1
7	15	7	5	4
1	-10	4	0	13

2	5	4	5	4
-5	10	-1	1	-6
-4	-3	-4	11	3
-4	-1	-12	7	3
1	15	0	5	-1

-9	2	-5	1	5
5	11	-11	12	2
2	1	2	9	2
4	-2	14	3	-5
-5	1	2	5	8

6	-7	5	4	3
6	1	-2	9	-10
-8	-9	2	17	-6
2	17	1	6	6
-8	6	-4	0	1

-9	13	10	9	-3
-2	13	19	8	-8
15	-4	7	15	3
2	12	-6	12	5
10	-5	3	-1	-4

4	10	6	-3	12
-2	9	14	9	-8
-5	-11	0	12	1
-3	-6	3	13	6
6	9	10	6	7

-1	9	-6	-2	-5
-2	-2	0	8	2
-4	3	8	13	0
8	3	9	-5	5
2	-5	2	2	6

-2	14	-6	11	-2
-5	-9	0	3	9
12	0	2	10	-3
10	12	10	0	-4
4	8	14	7	11

Пример. Найти решение матричной игры

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Решение

Таблица 2

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	-3	4	5	-3
A_2	5	7	8	6	5
A_3	3	1	3	7	1
A_4	4	6	2	9	2
β_j	5	7	8	9	

$\alpha = \max\limits_i \min\limits_j \mathrm{a_{ij}} = \max\limits_i \alpha_\mathrm{i} = \max(-3;5;1;2) = 5$ - нижняя чистая цена игры.

Максиминной стратегией игрока *А* является A_2.

$\beta = \min\limits_j \max\limits_\mathrm{i} \mathrm{a_{ij}} = \min\limits_j \beta_\mathrm{j} = \min(5;7;8;9) = 5$ - верхняя чистая цена игры.

Минимаксной стратегией игрока *В* является B_1.

$v=\alpha=\beta=5$.

Седловая точка $(A_2; B_1)$, а седловой элемент a_{21}=5. игры седловой элемент, оптимальные чистые стратегии A^*_1 и B^*_2 соответственно игроков *А* и *В*. *Решением игры* является совокупность оптимальных стратегий и цены игры, т. е. тройка $(A_2, B_1, 5)$.

Если же матричная игра не имеет седловой точки, то решение игры затрудняется. $\alpha<\beta$. Применение максиминных и минимаксных стратегий в таких играх приводит к тому, что для каждого из игроков выигрыш не превышает α, а проигрыш - не меньше β.

Практическая работа 2. экономико-математические модели теории игр для решения поизводственных задач (2 часа).

Цель: научиться применять экономико-математические модели теории игр для решения поизводственных задач.

Задание. *Построенить экономико-математическую модель конфликтной ситуации. Решенить игру в чистых стратегиях* (для решения задачи исаользовать теоретический материал раздела)

Рассмотреть в качестве примера конфликтной ситуации разработку новой продукции и внедрение современных технологии.

Конструктор получил задание разработать часы. Для выхода на рынок необходимо использовать различные варианты оформления продукта – K_1, K_2, K_3, $К_4$, обеспечивающие требуемое разнообразие и учитывающие модели поведения потребителя. Кроме того, каждый вариант может быть реализован каким-либо из трех технологических процессов: T_1, T_2, T_3. Предположим для простоты, что параметры часов во всех случаях будут практически одинаковыми, а внешний вид изделий различен. Если конструктивный вариант K_i (i =1,4) будет реализован с помощью технологического процесса T_J (j = 1,3), то внешний вид часов оценивается экспертами в $a_{i\,j}$ баллов.

Конфликтная ситуация возникает из-за того, что затраты на реализацию каждого конструктивно-технологического варианта неодинаковы. Для простоты расчетов и наглядности допустим, что затраты пропорциональны оценке внешнего вида, т.е. вариант, имеющий наибольшую оценку, оказывается и самым дорогим.

Выбрать конструктивный вариант, который был бы, если не самым лучшим, то во всяком случае оптимальным как с точки зрения внешнего вида, так и стоимости.

Рассмотрим матрицу [$a_{i\ \ j}$] для конструктивного и технологического варианта

$К_i$ \ $Т_j$	$Т_1$	$Т_2$	$Т_3$
$К_1$	9	6	7
$К_2$	8	4	6
$К_3$	5	6	8
$К_4$	7	4	8

1. Объектом моделирования в данной ситуации являются ниши рынка.

2. Проблемная ситуация состоит в том, что конструктор пытается воплотить в жизнь самый красивый вариант часов, но экономисты хотят выпускать часы с наименьшими затратами, даже если это будет в ущерб внешнему виду.

3. Неуправляемыми и ненаблюдаемыми величинами являются выбранные конструктивный и технологический варианты часов и затраты на их производство.

4. Наблюдаемыми параметрами являются затраты на реализацию всех конструктивных вариантов любыми из разнообразных технологических способов, т.е. матрица игры.

5. Параметром адекватности модели является максиминный выигрыш или минимаксный проигрыш, величина которого называется чистой ценой игры.

6. Математическая модель этой задачи - это матричная игра с нулевой суммой.

Если конструктор выбирает вариант K_1, то экономисты будут настаивать на технологии с наименьшими затратами α_1= 6, среди элементов первой строки матрицы ищем минимальное значение и записываем его на конце таблицы. Для других вариантов поступаем .аналогично и получаем α_2= 4, α_3 =5, α_4=4. Чтобы при таком неблагоприятном для конструктора выборе максимизировать выигрыш, необходимо среди всех стратегий выбрать ту, при которой $\alpha=\max \alpha_i = \max \min a_{ij}$ = 6. Эта величина называется максиминным выигрышем, а соответствующая ей стратегия K_1 -максиминной стратегией. Если придерживаться максиминной стратегии, то при любом поведении конкурента гарантирован выигрыш, во всяком случае не меньший α=6.

Аналогичные рассуждения необходимо провести, занимая позицию экономистов. Если выбрать технологию T_1, то конструктор будет настаивать на варианте K_1, так как он имеет более высокую оценку: β_1 =9. Для технологии T_2 предпочтительнее с точки зрения конструктора варианты K_1 или K_3: β_2 =6 и для технологии T_3 - варианты K_3 или K_4: β_3 = 8. Таким образом, в каждом столбце ищем наибольший элемент и записываем внизу таблицы. При таком неблагоприятном для экономистов выборе необходимо минимизировать проигрыш, т.е. среди всех стратегии выбрать ту, при которой β_j минимально. В нашей задаче $\beta = \min \beta_j = \min \max a_{ij}$ =6. Эта величина называется минимаксным проигрышем, а стратегия T_2 - минимаксной. Придерживаясь этой стратегии величина проигрыша будет не больше β = 6.

Так как $\alpha = \beta = v = 6$, то данная матричная игра имеет решение в чистых стратегиях. Оптимальными стратегиями являются максиминная стратегия K_1 и минимаксная стратегия T_2, а величина $\alpha = \beta = 6$ называется чистой ценой игры. Отклонение от этих стратегий приводит к уменьшению выигрыша конструктора и увеличение проигрыша экономистов по сравнению с ценой игры v = 6.

Аналитическое решение задачи можно оформить в виде таблицы.

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3	α_i
K_1	9	6	7	6
K_2	8	4	6	4
K_3	5	6	8	5
K_4	7	4	8	4
β_j	9	6	8	6 / 6

Вывод: Итак, из предложенных конструктивных вариантов следует выбрать K_1 и реализовать его с помощью технологического процесса T_2, который является, если не самым лучшим, то во всяком случае оптимальным как с точки зрения внешнего вида, так и стоимости (6 ден. ед.), соответственно.

Решить задачу для следующих матриц

В-1

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	2	4	3
K_2	5	8	5
K_3	7	4	5
K_4	4	7	4

.В-2

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	1	2	3
K_2	7	4	3
K_3	5	6	1
K_4	2	4	2

В-3

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	3	5	7
K_2	4	8	2
K_3	5	6	7
K_4	5	4	8

В-4

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	1	2	4
K_2	6	2	3
K_3	4	3	5
K_4	4	1	2

В-5

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	2	1	6
K_2	5	3	5
K_3	6	2	6
K_4	5	2	4

В-6

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	4	6	5
K_2	6	5	4
K_3	5	6	4
K_4	7	5	5

В-7

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	4	1	2
K_2	6	3	5
K_3	4	2	5
K_4	7	3	6

В-8

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	4	5	3
K_2	5	6	5
K_3	3	4	2
K_4	4	6	1

В-9

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	4	8	6
K_2	2	1	5
K_3	3	7	4
K_4	7	6	6

В-10

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	5	3	1
K_2	7	4	5
K_3	6	2	6
K_4	6	4	5

В-11

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	9	3	1
K_2	7	4	3
K_3	5	8	4
K_4	7	6	5

В-12

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	9	8	7
K_2	8	9	6
K_3	7	6	7
K_4	7	9	7

В-13

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	2	5	3
K_2	8	4	1
K_3	5	3	2
K_4	7	4	4

В-1 4

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	3	6	4
K_2	2	4	3
K_3	5	6	5
K_4	9	9	5

В-15

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	9	6	7
K_2	2	4	6
K_3	5	3	8
K_4	7	4	8

В-16

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	7	5	3
K_2	9	4	6
K_3	6	5	7
K_4	7	4	8

B-1 7

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	9	2	3
K_2	8	4	1
K_3	5	6	3
K_4	6	4	4

B-18

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	3	6	7
K_2	4	4	6
K_3	5	7	8
K_4	3	4	8

B-1 9

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	9	5	7
K_2	1	4	6
K_3	5	3	8
K_4	3	4	5

B-20

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	4	5	7
K_2	8	3	6
K_3	5	5	8
K_4	7	4	8

B-21

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	4	6	4
K_2	7	4	6
K_3	3	6	8
K_4	7	6	8

B-22

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	8	6	7
K_2	8	3	6
K_3	5	6	8
K_4	7	4	8

B-23

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	5	2	7
K_2	3	4	6
K_3	5	5	8
K_4	7	4	8

B-24

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	4	6	9
K_2	3	4	6
K_3	5	6	8
K_4	2	2	8

B-25

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	9	8	7
K_2	8	3	6
K_3	5	2	5
K_4	7	4	4

B-26

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	8	5	7
K_2	9	4	6
K_3	3	1	8
K_4	7	3	8

B-27

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	5	5	7
K_2	8	4	6
K_3	5	3	8
K_4	9	4	8

B-28

T_j / K_i	T_1	T_2	T_3
K_1	10	7	6
K_2	8	4	7
K_3	5	11	7
K_4	8	14	7

РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДОВАННЫХ СРЕДСТВ ДИАГНОСТИКИ

Об учебных достижениях студентов свидетельствует выполненные в соответствии с целями и задачами лабораторные работы. В качестве одного из элементов диагностического инструментария для выявления уровня учебных достижений студента рекомендуется использовать критериально-ориентированные тесты. Они представляют собой совокупность тестовых заданий закрытой формы с одним или несколькими вариантами правильных ответов; заданий на установление соответствия между элементами двух множеств с одним или несколькими соотношениями и равным или разным количеством элементов в множествах; заданий открытой формы с формализованным ответом; заданий на установление правильной последовательности.

Для измерения степени соответствия учебных достижений студента требованиям образовательного стандарта также рекомендуется использовать проблемные, творческие задачи, предполагающие эвристическую деятельность и неформализованный ответ.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ, ЗАЧЕТУ И ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

Вопросы к экзамену

6. Операции над матрицами.
7. Определитель матрицы.
8. Обратная матрица.
9. Системы линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений.
10. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
11. Формулы Крамара Решения систем линейных уравнений.
12. Понятие графа.
13. Матричные представления графа.
14. Дерево. Покрывающее граф дерево.
15. Построение матрицы достижимостей. Нахождение пути длины p.
16. Поток на графе. Отыскание максимального потока.
17. Нахождение минимального пути между двумя вершинами графа.
18. Испытания и события. Полная группа событий.
19. Операции над событиями.
20. Вероятность. Классическое определение вероятности.

21. Геометрический и статистический методы задания вероятностей.
22. Свойства вероятностной меры.
23. Элементы комбинаторики: перестановки, сочетания, размещения.
24. Операции над вероятностями. Вероятность суммы событий.
25. Вероятность произведения событий.
26. Вероятность произведения событий.
27. Формула полной вероятности.
28. Формула Байса.
29. Распределение дискретной случайной величины.
30. Математическое ожидание и его свойства.
31. Дисперсия и квадратическое отклонение.
32. Распределение Бернули.
33. Гамма-функция и ее свойства.
34. Нормальное распределение.
35. Распределение хи-квадрат.
36. Распределение Стьюдента.
37. Распределение Фишера.
38. Генеральная совокупность.
39. Выборочная совокупность.
40. Частоты. Относительные частоты. Накопленные частоты.
41. Эмпирическая функция распределения.
42. Статистические оценки параметров.
43. Основные геометрические фракталы.
44. Рекурсивные алгоритмы.
45. Области применения фракталов.
46. Понятие комплексного числа. Графическое представление комплексного числа.
47. Операции над комплексными числами.
48. Фрактал Мандельброта.
49. Мультифракталы.

Задачи к экзамену

1. В коробке 8 белых и 6 черных шаров. Из коробки наугад вынимаются два шара. Найдите вероятность того, что:

а) оба шара черные;

б) оба шара разного цвета.

2. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Пять карточек вынимаются наугад одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Найдите вероятность того, что получится слово «конец».

3. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна 0,9, на второй – 0,9, на третий – 0,8. Найдите вероятность того, что студент сдаст экзамен, если необходимо ответить хотя бы на два вопроса билета.

4. Вероятность подключения абонента к каждой из четырех АТС соответственно равна 0,2; 0,36; 0,16; 0,28. Вероятность соединения с абонентом в случае его подключения к первой АТС равна 0,12, ко второй – 0,125, к третьей – 0,3, к четвертой – 0,75. Какова вероятность соединения ?

5. Вероятность того, что машина, взятая напрокат, будет возвращена исправной, равна 0,8. Какова вероятность, что из 4 возвращенных машин 3 окажутся исправными ?

6. В группе 30 студентов, из которых отличников – 8, хорошо успевающих – 13 и слабо успевающих – 9. На предстоящем экзамене отличники могут получить только оценки «5», хорошо успевающие могут получить с равной вероятностью оценки «4» и «5», слабо успевающие могут получить с равной вероятностью оценки «3», «4» и «5». Для сдачи экзамена вызывается наугад один студент. Найдите вероятность того, что он получит оценку не ниже «4».

7. У рыбака есть три излюбленных места рыбалки, которые он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность клева на первом месте равна 1/3, на втором – 1/2, на третьем – 1/4. Рыбак забросил удочку три раза, а рыба клюнула только один раз. Найдите вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

8. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором 30 деталей, из них 24 стандартных, в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.

9. Какие из событий являются частью другого события:

а) A – «попадание в мишень первым выстрелом», B – «попадание в мишень по меньшей мере одним из 4 выстрелов», C – «попадание точно в мишень одним из 2 выстрелов», D – «попадание в мишень не более чем 5 выстрелами»;

б) А – «появление 3 очков при бросании игральной кости», В – «появление не более 3 очков при бросании игральной кости», С – «появление не более 4 очков при бросании игральной кости»?

10. Событие A – «появление 6 очков при бросании игральной кости»; событие B – «появление 5 очков при бросании игральной кости», событие C – «появление 4 очков при бросании игральной кости».

В чем состоит событие $A+B+C$?

11. Событие A_1 –«появление четного числа очков при бросании игральной кости», событие A_2 – «появление 2 очков при бросании игральной кости»,

событие A_3 – «появление 4 очков при бросании игральной кости», событие A_4 – «появление 6 очков при бросании игральной кости».

Докажите, что:

1) $A_1\overline{A}_4=A_2+A_3$; 2) $\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4 = V$; 3) $A_1\overline{A}_3\overline{A}_4=A_2$; 4) $A_1A_2=A_2$; 5) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3=A_4$; 6) $A_2A_3=V$;

12. Рассмотрев конкретные события A, B, C, убедитесь в том, что:

$AB=BA$; $A(BC)=(AB)C$; $A(B+C)=AB+AC$; $A+BC=(A+B)(A+C)$;

$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$; $\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}$; $(A+B)(A+C)(B+C)=AB+AC+BC$.

13. Наудачу отобранная деталь может оказаться или первого сорта (событие A), или второго (событие B), или третьего (событие C).

В чем состоят события: $A+B$; $\overline{A+C}$; AC; $AB+C$?

14. Пусть A, B и C – случайные события, выраженные подмножествами одного и того же множества элементарных событий. Запишите событие, означающее, что:

а) произошло только событие A;

б) произошло одно и только одно из данных событий;

в) произошло два и только два из данных событий;

г) произошли все три события;

д) произошло хотя бы одно из данных событий.

15. Событие A – «получение достаточной для сдачи экзамена оценки», событие B – получение «девятки». В чем состоят события $A–B$, $A-\overline{B}$, $\overline{A}-B$, $\overline{A-B}$ и $\overline{A}-\overline{B}$?

16. Событие A – «появление 3 очков при бросании игральной кости», событие B – «появление нечетного числа очков», событие C – «появление не больше 5 очков». В чем состоит событие $AB-\overline{C}$?

17. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей: а) при бросании игральной кости выпало 4 очка; б) при двух бросаниях игральной кости выпало в сумме не менее 3 очков; в) при бросании игральной кости выпало нечетное число очков.

18. Десять лучших спортсменов университета будут участвовать в межуниверситетских соревнованиях по бегу. Сколькими способами можно отобрать: а) 2 человека для участия в соревнованиях по бегу на 100 м; б) 4 человека для участия в эстафете 4 по 100 м; в) 4 человека для участия в эстафете 100 м + 200 м + 400 м + 800 м; г) 3 человека для участия в забеге на 3 км?

19**.** Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,7, для третьего – 0,9. Найти вероятность p того, что в цель попадет хотя бы один стрелок.

20. Имеется шесть карточек с буквами М, М, И, О, А, З. Найти вероятность того что случайным образом разложив карточки мы получим слово мимоза.

21. Закон распределения дискретной случайной величины X задан следующей таблицей:

X	0	1	2	3	4
p	0,13	0,35	0,35	0,15	0,02

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

22. Найдите математическое ожидание случайной величины X и дисперсию, если закон ее распределения задан таблицей:

X	1	2	3	4
p	0,3	0,1	0,2	0,4

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Тема 12. Математические модели и их применение для решения задач сферы культуры

Каждый человек ежедневно, не всегда осознавая это, решает проблему: как получить наибольший эффект, обладая ограниченными средствами. Чтобы достичь наибольшего эффекта, имея ограниченные средства, надо составить план, или программу действий. Раньше план в таких случаях составлялся на глазок. В середине XX века был создан специальный математический аппарат, помогающий это делать по науке. Соответствующий раздел математики называется математическим программированием. Слово программирование здесь обязано отчасти историческому недоразумению, отчасти неточному переводу с английского. По-русский лучше было бы употребить слово планирование. С программированием для ЭВМ математическое программирование имеет лишь то общее, что большинство возникающих на практике задач математического программирования слишком громоздки для ручного счёта, решить их можно только с помощью ЭВМ, предварительно составив программу. Временем рождения линейного программирования принято считать 1939 год, когда была напечатана брошюра Леонида Витальевича Канторовича «Математические методы организации и планирования производства». Поскольку методы были малопригодны для ручного счёта, а быстродействующих вычислительных машин ещё не существовало, работа осталось почти незамеченной.

Своё второе рождение линейное программирование получило в начале 50тых годов с появлением ЭВМ. Тогда началось всеобщее увлечение линейным программированием, вызвавшее развитие других разделов математического программирования. В 1975 году академик Л.В. Канторович и американец профессор Т. Купманс получили Нобелевскую премию по экономическим наукам за «вклад в разработку теории и оптимального использования ресурсов в экономике».

Американский математик А. Данциг в 1947 году разработал эффективный метод численного решения задач линейного программирования (симплекс-метод). Идеи линейного программирования в течении 5-6 лет получили грандиозное распространение в мире и имена Т. Купманса и А. Данцига стали широко известны. Примерно в это время Купманс узнал, что в далёкой России уже была сделана разработка начал линейного программирования. Купманс настаивает на переводе и издании на западе книги Канторовича. Его имя и идеи становятся широко известны.

Задача математического программирования – это задача максимизации (минимизации) целевой функции при наличии ограничений на аргументы.

Задачи линейного программирования являются самыми простыми и наиболее изученными задачами математического программирования. Для них характерно: показатель эффективности (целевая функция) выражается линейной зависимостью, ограничения на решения – линейные равенства или неравенства. Подсчитано, что в настоящее время примерно 80-85% всех решаемых на практике задач оптимизации относится к задачам линейного программирования.

Симплекс-алгоритм решения задачи ЛП

Реальные задачи линейного программирования содержат, как правило, большое число ограничений и неизвестных. Естественно, что решение таких задач связано с большим объемом вычислений и проводится на быстродействующих вычислительных машинах. Алгоритм, лежащий в основе машинной программы, может быть связан со спецификой данного класса задач. Однако существуют и общие методы, позволяющие найти решение любой задачи линейного программирования за обозримое число шагов. К их числу относится прежде всего так называемый ***симплекс-метод.***

Симплекс-метод является вычислительной процедурой, которая позволяет решить любую каноническую ЗЛП алгебраическим методом.

Каноническая форма ЗЛП:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max\ (min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = 1, \dots, m) \qquad (*)$$

$$x_j \geq 0, (j = 1, \dots, n)$$

Решение системы (*) называется ***допустимым***, если оно удовлетворяет ограничениям

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n),$$

Суть Симплекс-метода состоит в последовательном переборе базисных допустимых решений системы (1), которых конечное число, начиная с начального опорного плана. Перебор осуществляется таким образом, чтобы каждое новое решение было лучше предыдущего (в смысле приближения к максимуму или минимуму целевой функции f). В итоге, через определённое число шагов будет либо найдено оптимальное решение (оптимальный план), либо установлена неразрешимость задачи. Для получения нового базисного допустимого решения первоначальный базис преобразовывают в новый путём удаления некоторой базисной переменной и вместо неё вводят другую из группы свободных переменных.

С ***геометрической точки зрения*** перебор опорных планов можно рассматривать как переход по рёбрам от одной вершины многогранника решений к другой по направлению к вершине ***X****, в которой целевая функция достигает оптимального значения.

<u>Этапы решения ЗЛП</u> <u>Симплекс-методом</u>

1. ЗЛП должна быть приведена к канонической форме. Для этого к левой части неравенства добавляется или вычитается дополнительная неотрицательная переменная для получения равенства (***балансовая переменная)***.
2. Нахождение начального опорного плана X_0 (допустимого базисного решения), наличие которого гарантирует непротиворечивость ограничений задачи. Для этого все элементы столбца свободных членов b_i должны быть неотрицательны ($b_i \geq 0$). В системе должен быть выделен базис.

►Если $b_i < 0$, то соответствующее ограничение умножается на (- 1).

►Если в ограничении ЗЛП в канонической форме есть переменная с коэффициентом, равным 1, отсутствующая в других ограничениях, то она называется ***базисной (БП)***, остальные переменные ограничения – ***свободные (СП)***.

►Если базисные переменные есть во всех ограничениях, то такая форма ЗЛП называется ***канонической с базисными переменными*** (является исходной для решения ЗЛП симплекс-алгоритмом).

3. Целевая функция должна быть выражена через свободные переменные и максимизируется.
4. Симплекс-алгоритмом находят оптимальный план ЗЛП ***X*.***

Поясним суть метода на следующем примере:

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases} \qquad (1)$$
$$x_j \geq 0; (j = \overline{1,2})$$

Приведем ЗЛП к каноническому виду введением балансовых переменных x_3, x_4. Получим задачу: Переменные x_3, x_4 являются базисными, x_1, x_2 – свободные. Имеем каноническую форму с базисными переменными. Целеваяфункция выражена через свободные переменные, $b_i \geq 0$. Исходные условия выполнены: есть начальное допустимое базисное решение (опорный план) $\overline{x_0} = (0,0,9,8)$; $f(\overline{x_0}) = 0$. Составим первую симплекс-таблицу: для задачи максимизации коэффициенты при переменных в строку целевой функции (f – строку) вносятся с противоположным знаком. Добавим справа симплексный столбец (СС).

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \end{cases} \qquad (2)$$
$$x_j \geq 0; (j = \overline{1,4})$$

БП	1	X_1	X_2	X_3	X_4	СС
$X_3 =$	9	3	1	1	0	9/1=9
$X_4 =$	8	1	2	0	1	8/2=4
$f =$	0	-3	-4	0	0	

Проверим опорный план $\overline{x_0}$ на оптимальность.

Поскольку целевая функция *f* выражена через свободные переменные, коэффициенты при которых положительны, то, очевидно, увеличение этих переменных приведет к увеличению значения целевой функции. Поэтому делаем вывод, что опорный план $\overline{x_0}$ не является оптимальным (т.к. введение в базис переменных x_1 , x_2 приведёт к увеличению значения целевой функции). Делаем вывод, что критерием оптимальности опорного плана для задачи максимизации является отсутствие отрицательных элементов в строке целевой функции (коэффициенты при переменных). Итак, для того, чтобы получить лучшее базисное решение, мы должны включить в базис переменные x_1 и x_2. Будем вводить их в базис по очереди. Поскольку увеличение переменной x_2 быстрее увеличивает *f*, то выбираем переменную x_2 для включения ее в базис (это разумно, но не обязательно). Теперь надо выяснить в какой строке системы (2) переменная x_2 будет базисной, чтобы полученное новое базисное решение было допустимым. Анализируя первое уравнение системы, замечаем, что поскольку x_1 =0, то увеличение x_2 влечет уменьшение x_3. Так как $x_3 \geq 0$, то увеличение x_2 возможно лишь до тех пор, пока x_3 не уменьшится до нуля, т.е. до значения 9/1 =9. Поскольку переменная x_2 есть также и во втором уравнении, то рассуждая аналогично, заключаем, что в этом случае переменную x_2 можно увеличивать максимум до значения 8/2 = 4 при котором переменная x_4 уменьшится до нуля. Поэтому новое базисное решение будет допустимым, если мы будем увеличивать переменную x_2 до значения, равного min{9/1, 8/2}=4 (минимального положительного симплекс-отношения), которое достигается во второй строке системы. Поэтому переменная x_2 должна быть базисной во втором уравнении, элемент a_{22}=2 системы будет разрешающим и, проводя жордановы исключения, получаем новое (улучшенное) базисное допустимое решение.

Обобщая приведенные выше рассуждения, сформулируем

Алгоритм нахождения оптимального плана (Алгоритм Симплекс-метода).

Исходные данные:

Задача в канонической форме;

Целевая функция максимизируется;

Найдено начальное базисное допустимое решение (опорный план);

Целевая функция выражена через свободные переменные.

Каждая итерация метода состоит из трех шагов:

Шаг 1 . Имеющийся план проверяется на оптимальность.

Если в f - строке нет отрицательных элементов, то имеющийся план оптимален и задача решена. Если отрицательные элементы есть, то план не оптимален. Выбираем любой отрицательный элемент f – строки (желательно максимальный по модулю) и считаем столбец, в котором он находится, в качестве разрешающего. Пусть для определенности это столбец переменной x_s.

Шаг 2. Выбор разрешающей строки.

Пусть разрешающий столбец, выбранный на предыдущем шаге, это столбец переменной x_s. Для каждой i-ой строки (i = 1,...,m) делим элементы столбца свободных членов на положительные элементы разрешающего столбца, стоящие в этой строке, и находим минимальное из полученных частных, т.е. находим минимальное положительное симплексное отношение:

$$\min_{i, a_{is}>0} \frac{b_i}{a_{is}} = d.$$

Пусть этот минимум достигается в строке k . Тогда k-ая строка является разрешающей, элемент a_{ks} - разрешающий элемент таблицы.

Шаг 3. Пересчет таблицы.

Преобразованиями Жордана-Гаусса (симплексными преобразованиями) пересчитываем таблицу относительно разрешающего элемента a_{ks}, найденного на предыдущем шаге.

Симплексные преобразования – это правила пересчёта элементов симплекс-таблицы при переходе к новому опорному плану и заключаются они в следующем:

1) элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;
2) все остальные элементы таблицы вычисляются по формуле прямоугольника:

$$a_{ij}^{/} = a_{ij} - \frac{a_{kj} a_{is}}{a_{ks}}$$, где a_{ks} - разрешающий элемент, a_{ij} - пересчитываемый элемент,

a_{is} - соответственный элемент разрешающего столбца, a_{kj} - соответственный элемент разрешающей строки, a'_{ij} - элемент новой таблицы, стоящий в i – той строке и j – ом столбце на месте элемента $a_{ij.}$ В рассматриваемой задаче, например,

$$\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots a_{ij} \ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots a_{kj} \ldots\ldots a_{ks} * \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$a_{11}^{/} = a_{11} - \frac{a_{21} a_{12}}{a_{22}} = 3 - \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{5}{2};$$

$$b_1^{/} = b_1 - \frac{b_2 a_{12}}{a_{22}} = 9 - \frac{8 \cdot 1}{2} = 5;$$

$$f_1 = f_0 - \frac{b_2 c_2}{a_{22}} = 0 - \frac{8 \cdot (-4)}{2} = 16.$$

В результате этих преобразований целевая функция будет выражена через новые свободные переменные, новый план $\overline{x_1}$ находится в столбце “1” и лучше предыдущего, так как значение целевой функции для нового плана равно $f_1 > f_0$. Вторая симплекс-таблица

БП	1	X_1 X_2 X_3 X_4	СС
$X_3 =$ $X_2 =$	5 4	5/2 0 1 -1/2 1/2 1 0 1/2	5/(5/2)=2 4/(1/2)=8
$f =$	16	-1 0 0 2	

Новый план $\overline{x_1} = (0{,}4{,}5{,}0)$; $f_1 = f(\overline{x_1}) = 16$ не оптимален, т.к. в f –строке имеются отрицательные элементы. Чтобы получить опорный план, более близкий к оптимальному, выполним симплексное преобразование табл.1. Поскольку базисных решений системы (2) конечное число, а каждое новое базисное решение лучше предыдущего, то этот процесс завершится за конечное число шагов. Переходим на *Шаг 1* и повторяем всю процедуру для нового плана. С этой целью выберем элементы, участвующие в преобразовании базиса X_3, X_2 в новый базис. Наибольший по модулю отрицательный элемент (-1) f-строки указывает, что в новый базис следует ввести переменную X_1, т.е. в качестве разрешающего в предстоящем симплексном преобразовании надо взять первый столбец. Чтобы определить переменную, выводимую из базиса, составляем положительные симплексные отношения и выбираем наименьшее из них:

$$\min(\frac{5}{5/2};\frac{4}{1/2}) = 2.$$

Итак, из базиса надо исключить переменную, стоящую в первой (разрешающей) строке, т.е. X_3. На пересечении разрешающих столбца и строки находится разрешающий элемент 5/2, с которым и выполняется симплексное преобразование. В результате приходим к таблице 3.

П	1	X_1	X_2	X_3	X_4
$X_1 =$	2	1	0	2/5	-1/5
$X_2 =$	3	0	1	-1/5	3/5
$f =$	18	0	0	2/5	9/5

В f-строке таблицы 3 отрицательных элементов нет, следовательно, опорный план $\overline{x_2} = (2,3,0,0)$ является оптимальным, а соответствующее ему значение 18 целевой функции будет максимальным.

Ответ: $f_{\max} = f(2,3) = 18.$

Алгоритм построения начального опорного плана

1. Записать задачу в форме жордановой таблицы так, чтобы все элементы столбца свободных членов были неотрицательны. Те уравнения системы, в которых свободные члены отрицательны, предварительно умножаются на (-1). Полученная таблица называется симплексной.
2. Симплексную таблицу преобразовать шагами жордановых исключений, замещая нули в левом столбце соответствующими x. При этом на каждом шаге разрешающим может быть выбран любой столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент. В ходе жордановых исключений столбцы под переброшенными наверх таблицы нулями можно вычёркивать. Вычёркиваются и строки, состоящие из одних нулей. Через некоторое число шагов все нули в левом столбце будут замещены и тем самым получен некоторый базис, а значит, и отвечающий ему опорный план.

Задание для самостоятельной работы.

1. Составить задачу линейного прграммирования вида (1), обосновав математическую модель для уаравления некоторым социо-культурным процессом.

2. Решить задачу симплекс мнтодом, рассмотренным в материале данной главы.

3. Увеличить размерность модели до 5 на 5. Решить задачу с помощью надстройки “Поиск решения” Exell.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Введение в прикладную математику

Цели и задачи дисциплины. Место прикладной математики в системе дисциплин подготовки культурологов-менеджеров. Связь с другими дисциплинами. Учебно-методическое обеспечение, формы контроля.

Тема 2. Матрицы

Определение матрицы. Порядок квадратной матрицы. Главная и побочная диагонали. Диагональная матрица. Умножение матрицы на число. Сложение матриц. Свойства умножения матрицы на число и сложения матриц. Умножение матриц. Умножение матрицы на вектор. Единичная матрица. Обратимая и обратная матрицы. Транспонированная матрица. Ранг матрицы. Симметрические и ортогональные матрицы. Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей.

Тема 3. Системы линейных уравнений

Система линейных уравнений. Решение системы лилейных уравнений. Равносильные системы. Разрешенная система. Набор разрешенных неизвестных. Свободные неизвестные. Общее решение совместной системы. Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Система линейных уравнений с квадратной матрицей. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений.

Тема 4. Основные понятия теории графов

Понятие графа. Вершины и ребра. Ориентированные и неориентированные графы. Параллельные ребра. Петли. Смежные вершины и ребра. Инцидентные вершины и ребра. Степень вершины. Изолированная вершина. Теорема о сумме степеней вершин графа. Теорема о числе нечетных вершин графа. Полный граф. Дополнение графа. Путь в графе. Цикл. Простой цикл. Длина пути. Связные и несвязные графы. Компонента графа. Теорема о простом цикле. Ориентированные графы. Понятие подграфа. Дерево. Покрывающее граф дерево. Циклический ранг графа Теорема о цикломатическом ранге графа.

Матричные представления графов. Матрица инциденций. Матрица смежности. Определение числа путей длины р. Матрицы достижимостей и контрдостижимостей.

Тема 5. Задачи оптимизации на графах

Взвешенный граф. Матрица весов графа. Алгоритм Дейкстры нахождения минимального пути в графе. Алгоритм построения минимального покрывающего дерева. Поток на графе. Входящие и выходящие потоки. Источники и стоки потока. Циркуляция. Мощность потока. Задача о потоке максимальной мощности.

Тема 6. Основные понятия теории вероятностей

Испытания и события. Достоверные и невозможные события. Несовместные, элементарные и равновозможные события. Полная группа несовместных событий. Операции над событиями. Операция сложения. Свойства операции сложения. Операция умножения и ее свойства.

Вероятность события. Классическая (лапласовская) модель. Классическое определение вероятности. Геометрический метод задания вероятностей. Статистический метод задания вероятностей. Свойства вероятностной меры. Элементы комбинаторики. Перестановки размещения и сочетания.

Тема 7. Операции над вероятностями

Теорема о вероятности суммы двух несовместных событий. Следствия из теоремы о вероятности суммы двух несовместных событий. Теорема о вероятности суммы двух совместных событий. Теорема о вероятности произведения двух независимых событий. Теорема о вероятности произведения двух зависимых событий. Формула полной вероятности. Формула Бейеса. Использование формулы Бейеса для решения задач. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Использование формулы Бернулли для решения задач.

Тема 8. Дискретная случайная величина

Дискретная случайная величина. Закон распределения дискретной случайной величины. Математическое ожидание. Свойства математического ожидания. Дисперсия и квадратическое отклонение. Закон больших чисел. Относительная частота. Сущность теорем Бернулли и Чебышева.

Тема 9. Основные распределения случайных величин

Распределения случайных величин. Биномиальный закон распределения. Экспоненциальное распределение. Нормальное распределение. Распределение хи-квадрат. Распределение Стьюдента. Распределение Фишера. Гамма распределение.

Тема 10. Основные понятия математической статистики

Генеральная совокупность. Объем генеральной совокупности. Выборочная совокупность (выборка). Объем выборки. Выборки с возвращением и без возвращения. Репрезентативность выборки. Методы отбора данных: простой случайный, типический, механический, серийный. Выборочные ряды распределения. Варианты. Вариационные ряды. Частоты. Относительные частоты (частости). Накопленные частоты. Среднее значение вариант, медиана, размах варьирования. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Графическое изображение статистических рядов. Гистограмма. Полигон. Статистические оценки параметров. Среднее выборочное значение. Выборочная дисперсия. Центральные выборочные моменты.

Тема 11. Основы фрактальной геометрии

Понятие «фрактальный». Классификация фракталов. Основные геометрические фракталы: Снежинка Коха, Дерево Пифагора, Ковер Серпинского, Кривая Дракона. Рекурсивные алгоритмы построения простейших фракталов. Фрактальная размерность. Области применения фракталов. Алгебраические и тохастические фракталы Понятие комплексного числа. Фрактал Мандельброта и множество Жюлиа. Системы Итерируемых функций. Алгоритмы построения IFS-фракталов. Мультифракталы.

Тема 12. Математические модели и их применение для решения задач сферы культуры

Методы линейного программирования для решения задач оптимизации. Задача транспортного типа с максимизацией целевой функции. Матричные игры. Парные матричные игры с нулевой суммой. Чистые и смешанные стратегии и их свойства. Задачи сетевого планирования и управления. Марковские случайные процессы в системах массового обслуживания.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Для каждогй практической работы определены тема, цель, основные понятия, вопросы и задания с примерами решения задач. Основные понятия помогают акцентировать внимание студентов на ключевых аспектах изучаемой темы. Примеры решения задач помогают студентам при самостоятельной подготовке к практическим занятиям.

При оценке результатов работы студентов на практичсеких занятиях учитываются:

- своевременность подготовки материала;
- точность и полнота подготовленного материала;
- привлечение знаний из других областей;
- умение аргументировать свои заключения, выводы;
- эстетика подготовленного материала.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Для каждой лабораторной работы определена цель, приведены краткие теоретические сведения, акцентирующие внимание на основных вопросах, которые должны быть усвоены при ее выполнении. Формулируется общее задание, затем описывается последовательность выполнения работы с пошаговой детализацией. Лабораторные работы по учебной дисциплине «Прикладная математика» выполняются студентами в виде *тематических проектов*.

Отчет о выполнении лабораторной работы должен включать титульный лист, пояснительную записку, печатный и электронный вариант выполненного проекта. В пояснительной записке автор проекта описывает алгоритм и результаты выполнения заданий, делает выводы о возможностях доработки проекта и его использования в профессиональной деятельности культуролога. Защита лабораторной работы заключается в представлении отчета (с выполненным проектом) и в устных ответах на вопросы по проекту.

При оценке проекта учитываются:

- своевременность сдачи законченного проекта;

– точность и полнота выполнения заданий, указанных в каждой лабораторной работе;

– применение знаний из других областей;

– доказательность принимаемых решений, умение аргументировать свои заключения, делать выводы;

– эстетика оформления проекта и отчета в целом.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

Самостоятельная работа студентов направлена на обогащение их умений и навыков по дисциплине «Прикладная математика» в свободное от обязательных учебных занятий время. Цель самостоятельной работы студентов – содействие усвоению в полном объеме содержания учебной дисциплины через систематизацию, планирование и контроль собственной деятельности. Преподаватель даёт задания по самостоятельной работе и регулярно проверяет их выполнение.

С учетом содержания, цели и задач дисциплины «Прикладная математика» студентам предлагается осуществлять такие виды самостоятельной работы по дисциплине, как контент-анализ публикаций по использованию информационных технологий в сфере культуры, разработка тематических презентаций, выполнение задач, связанных с использованием информационных технологий.

При изучении дисциплины используются следующие формы самостоятельной работы:

– контролируемая самостоятельная работа в виде решения индивидуальных задач в аудитории во время проведения лабораторных занятий под контролем преподавателя в соответствии с расписанием;

– управляемая самостоятельная работа, в том числе в виде выполнения индивидуальных заданий с консультациями преподавателя;

Самостоятельная работа студентов ориентирована на изучение отдельных вспомогательных тем дисциплины, решение дополнительных рекомендованных задач и подбор практических примеров, иллюстрирующих применение моделей прикладной математики в деятельности специалиста культуролога. Результаты самостоятельной работы выявляются как при ответах на теоретические вопросы, так и при решении задач. Текущий контроль осуществляется при выполнении и сдаче лабораторных работ.

Оценка уровня знаний студента производится по десятибалльной шкале.

Для оценки достижений студента рекомендуется использовать следующий диагностический инструментарий:

– устный опрос во время практических занятий;

– проведение текущих контрольных работ (заданий) по отдельным темам;

– защита выполненных на практических занятиях индивидуальных заданий;

– защита выполненных в рамках управляемой самостоятельной работы индивидуальных заданий;

– выступление студента на конференции по подготовленному реферату;

– защита индивидуальной работы;

– сдача зачета по дисциплине.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Гляков, П.В.* Основы высшей математики / П.В. Гляков, Т.И. Песецкая. – Минск : БГУ культуры и искусств, 2012. – 194 с.

2. *Нешитой, В.В.* Математико-статистические методы анализа в библиотечно-информационной деятельности: учеб.-метод. пособие / В.В. Нешитой. – Минск : БГУ культуры и искусств, 2009. – 203 с.

3. *Справочник* по математике для экономистов / В.Е. Барбаумов [и др.]; Под ред. В.И. Ермакова. – М. : Инфра-М, 2009. – 464 с.

4. *Критофидес, Н.* Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М. : Мир, 1978. – 432 с.

5. *Жданович, В.Ф.* Задания к лабораторным работам по курсу теории вероятностей и математической статистики в двух частях / В.Ф. Жданович, Н.В. [и др.]. Часть 1 и 2. Минск : БГУ, 1998. – 83с.

Дополнительная

6. *Лазакович, Н.В.* Теория вероятностей / Н.В. Лазакович, С.П. Сташуленок, О.Л. Яблонский. – Минск : БГУ, 2007. – 311 с.

7. *Плис, А.И.* MathCAD: математический практикум для экономистов и инженеров / А.И. Плис, Н.А. Сливина. – М. : Финансы и статистика, 2003. – 656 с.

8. *Белько, И.В.* Высшая математика для экономистов. I семестр: экспресс-курс / И.В. Белько, К.К. Кузьмич. – М. : Новое знание, 2002. – 140 с.

9. *Белько, И.В.* Высшая математика для экономистов. II семестр: экспресс-курс / И.В. Белько, К.К. Кузьмич. – М. : Новое знание, 2003. – 88 с.

10. *Мельников, О.И.* Теория графов в занимательных задачах / О.И. Мельников. – М. : Либрком, 2009. – 232 с.

11. *Божокин, С.В.* Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, В.А. Паршин. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.

14. Морозов, А.Д. Введение в теорию фракталов / А.Д. Морозов. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. – 162 с.