

# ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ

*В.В. НЕШИТОЙ*

*В предлагаемой статье обсуждаются вопросы применения обобщенных распределений при статистическом анализе параметров производимой продукции.*

*Рассматривается пример на выравнивание статистического распределения обобщенной плотностью с использованием компьютерной программы автора SNRIMM01.*

*Отмечаются преимущества применения обобщенных распределений в системах управления качеством продукции перед отдельными распределениями.*

## 1. Некоторые сведения о теории обобщенных распределений

Для описания широкого разнообразия статистических распределений случайных величин  $X$ ,  $T$ ,  $Y$  разработана теория обобщенных распределений, которая включает три системы непрерывных распределений, заданные 4 параметрическими плотностями [1]

$$p(x) = Ne^{k\beta x}(1 - \alpha ue^{\beta x})^{1/u-1}$$

$$p(t) = Nt^{k\beta-1}(1 - \alpha ut^\beta)^{1/u-1}$$

$$p(y) = Ny^{-1}(\ln y)^{k\beta-1}(1 - \alpha u(\ln y)^\beta)^{1/u-1}$$

с нормирующим множителем  $N$  и параметрами  $k$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $u$ ; систему дискретных распределений, взаимосвязанную с системой кривых роста новых событий; методы оценивания параметров (универсальный метод моментов и общий устойчивый метод); номограммы для установления типа выравнивающей кривой и нахождения в первом приближении оценок параметров и серию компьютерных программ (1990 – 1997) под общим названием SNR – для работы с системами непрерывных распределений и SDR – для работы с системой дискретных распределений, а также множество других программ. Программы вычисляют различные показатели статистических распределений, тип выравнивающей кривой, точечные оценки параметров, значения плотности вероятностей и функции распределения и др., строят кривую распределения, вычисляют показатели качества – коэффициенты точности, уровня настройки и ожидаемый процент брака и, наконец, дают рекомендации по оптимальному смещению центра статистическо-

го распределения, при котором брак будет минимальным. Перечень решаемых задач может быть расширен.

**Перед тем как внедрять статистическое регулирование технологического процесса с помощью контрольных карт, проводится его статистический анализ.**

Статистический анализ позволяет оценить возможности технологического процесса по выпуску бездефектной продукции, т. е. обладает ли он необходимой точностью и стабильностью, находится ли он в статистически управляемом состоянии, которое обеспечивает в пределах нормы показатели рассеяния и уровня настройки контролируемого параметра. При выполнении последнего условия можно вводить статистическое регулирование технологического процесса с помощью контрольных карт. Статистический анализ требуется для оценки технологической точности производственного оборудования во время эксплуатации, перед сдачей в ремонт, после ремонта, а также во многих других случаях, в том числе для оценки эффективности управляющих воздействий.

**Применение в системах менеджмента качества обобщенных распределений и разработанных на их базе серий компьютерных программ позволяет с высокой точностью оценивать возможности технологических процессов и поддерживать их в статистически управляемом состоянии при любом законе распределения технологических погрешностей, что гарантирует значительное снижение уровня брака.**

## 2. Показатели состояния технологического процесса

Статистический анализ заключается в выявлении закона распределения технологических погрешностей при производстве продукции, нахождении оценок его параметров и вычислении необходимых показателей, характеризующих состояние технологического процесса.

Для установления закона распределения контролируемого параметра необходимо отобрать не менее 100 единиц продукции (по ряду мгновенных выборок при неизменной настройке технологического процесса) и измерить значения контролируемого параметра. Далее следует выбрать подходящую систему непрерывных распределений и по соответствующей программе найти выравнивающее распределение и оценки его параметров. Найденный закон распределения случайной величины является наиболее полной ее характеристикой. Более того, он позволяет рассчитывать показатели состояния технологического процесса.

Одним из таких показателей является **показатель точности процесса** (коэффициент рассеяния). Он вычисляется по формуле [2]

$$K_T = \frac{\omega}{\delta} = \frac{X_a - X_n}{T_a - T_n}, \quad (2.1)$$

где  $\omega = X_a - X_n$  – ширина поля рассеяния (технологический допуск);  $X_a, X_n$  – верхняя и нижняя границы поля рассеяния;  $\delta = T_a - T_n$  – ширина поля допуска (конструкторский допуск);  $T_a, T_n$  – верхняя и нижняя границы поля допуска.

Ширина поля рассеяния вычисляется при условии, что 99,73 % значений контролируемого параметра находятся внутри границ поля рассеяния. Для нормального закона  $\omega = 6S$ , где  $S$  – выборочное среднее квадратическое отклонение.

При использовании обобщенных распределений ширину поля рассеяния будем определять из того же условия, т. е. доверительная вероятность  $P = F(X_a) - F(X_n) = 0.9973$ , при этом значения функции распределения  $F(X_n) = 0.00135$ ;  $F(X_a) = 1 - 0.00135 = 0.99865$ .

Чем меньше ширина поля рассеяния, тем точнее технологический процесс. Однако один показатель меры точности – коэффициент  $K_T$  – характеризует его не в полной мере.

В случае, когда центр статистического распределения  $\bar{X}$  смещен относительно середины

поля допуска  $T_0$ , т. е. имеются систематические погрешности, процесс может не обеспечивать изготовление бездефектной продукции.

Систематические погрешности характеризуются коэффициентом смещения, или показателем уровня настройки

$$K_n = \frac{E}{\delta} = \frac{|\bar{X} - T_0|}{T_a - T_n}, \quad (2.2)$$

где  $\bar{X}$  – среднее выборочное значение контролируемого параметра;  $T_0 = (T_a + T_n)/2$  – середина поля допуска,  $E$  – смещение центра рассеяния относительно середины поля допуска. Поскольку статистические распределения как правило имеют асимметрию, то в формуле (2.2) центр распределения  $\bar{X}$  целесообразно заменить на се-

редину поля рассеяния  $X_0$ , равное  $\frac{X_a + X_n}{2}$ .

$$\text{Тогда } K_n = \frac{|X_0 - T_0|}{T_a - T_n}. \quad (2.3)$$

**В заключение статанализа вычисляется предполагаемый уровень брака  $q$** , выраженный в процентах. Он находится по формуле

$$q = 100\% - [F(T_a) - F(T_n)] \cdot 100\%. \quad (2.4)$$

При этом брак на нижней границе поля допуска равен

$$q_n = F(T_n) \cdot 100\%, \quad (2.5)$$

а на верхней границе

$$q_a = [1 - F(T_a)] \cdot 100\%. \quad (2.6)$$

Отметим, что при условии, когда  $T_0 = X_0$  (при этом показатель уровня настройки  $K_n = 0$ ), а показатель точности  $K_T = 1$ , предполагаемый процент брака  $q = q_n + q_a$  равен 0.27 % при любом законе распределения контролируемого показателя. Это – предельно допустимый его уровень в машиностроении. С ростом  $K_T$  процент брака увеличивается.

В большинстве случаев достаточно обеспечить  $K_T \leq 0.75$ . Для ответственных технологических процессов необходимо иметь  $K_T = 0.4 \div 0.6$  [2, 3].

**Закон распределения контролируемого показателя качества наиболее полно характеризует технологический процесс.**

Если за некоторое время закон распределения не изменился, т. е. не изменились его параметры, например центр распределения и среднее

квадратическое отклонение (для первой системы непрерывных распределений, содержащих параметр сдвига [4]), или изменились в допустимых пределах, то процесс считается стабильным. Изменение значений центра распределения и среднего квадратического отклонения за допустимые пределы требует переналадки процесса.

Нестабильность технологического процесса по уровню настройки принято характеризовать коэффициентом смещения настройки [5]

$$K_{см} = \frac{\bar{X}(t) - \bar{X}_0}{\delta}, \quad (2.7)$$

где  $\bar{X}_0$ ,  $\bar{X}(t)$  – начальное и конечное (на момент времени  $t$ ) значения центра распределения.

Нестабильность технологического процесса по рассеянию характеризуют коэффициентом межнастройочной стабильности [5]

$$K_{м.с.} = \frac{S(t)}{S_0}, \quad (2.8)$$

где  $S_0$ ,  $S(t)$  – начальное и конечное (на момент времени  $t$ ) значения среднего квадратического отклонения.

Отметим, что в случае, когда показатель точности  $K_T < 1$ , а показатель уровня настройки, рассчитанный по формуле (2.3) не выходит за пределы интервала

$$0 \leq |K_H| \leq \frac{1}{2} (1 - K_T), \quad (2.9)$$

брак не превышает предельно допустимого значения  $q = 0.27\%$ .

Для регулирования технологического процесса необходимо установить исправленное среднее значение контролируемого параметра, которое вычисляется по формуле

$$\bar{X}_{испр} = \bar{X} + a, \quad (2.10)$$

где смещение  $a$  вычисляется из условия минимума ожидаемого процента брака при заданном значении показателя точности  $K_T$ . (Этот расчет выполняется по программе автора *SNR1MM01* или *SNR1MM03*).

При  $K_T > 1$  необходимо принять все меры для уменьшения поля рассеяния контролируемого параметра.

### 3. Зависимость показателей точности и уровня настройки от объема выборки

Установим связь между объемом выборки  $n$  и показателями  $K_T$ ,  $K_H$ .

Для того чтобы гарантировать выпуск бездефектной продукции, необходимо, чтобы поле конструкторского допуска было шире поля рассеяния, как минимум, на величину  $6\sigma_{\bar{x}} = 6\sigma_x/\sqrt{n}$ ,

где  $\sigma_x$  – среднее квадратическое отклонение среднего арифметического;

$n$  – объем выборки.

Итак, пусть

$$T_0 - T_n = X_0 - X_n + \frac{6\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (3.1)$$

Тогда коэффициент точности в общем случае будет задаваться формулой [1, 4]

$$K_T \leq \frac{X_0 - X_n}{X_0 - X_n + \frac{6\sigma_x}{\sqrt{n}}} \quad (3.2)$$

В частном случае, если случайная величина  $X$  распределена по нормальному закону, из (3.2) имеем

$$K_T = \frac{6\sigma_x}{6\sigma_x + \frac{6\sigma_x}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1} \quad (3.3)$$

Тогда коэффициент уровня настройки на основании (2.9) и (3.3) будет задан на интервале

$$0 \leq |K_H| \leq \frac{1}{2(\sqrt{n} + 1)} \quad (3.4)$$

При  $n = 100$  имеем:  $K_T \leq 0.909$ ;  $0 \leq |K_H| \leq 0.04545$ .

При  $n = 9$   $K_T \leq 0.75$ ;  $0 \leq |K_H| \leq 0.125$ .

При этих значениях  $K_T$  и  $K_H$  брак не превышает предельного уровня.

Из формулы (3.1) можно найти требуемое значение среднего квадратического отклонения (в случае нормального закона распределения случайной величины  $X$ )

$$\sigma_x = \frac{T_0 - T_n}{6 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}, \quad (3.5)$$

а также требуемое значение конструкторского допуска при заданном  $\sigma_x$

$$T_0 - T_n = 6\sigma_x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad (3.6)$$

## 4. Статистический анализ технологического процесса на базе обобщенных распределений

Рассмотрим статистическое распределение, представленное в таблице 4.1. Объем выборки  $n = 381$ . Нижняя и верхняя границы конструкторского допуска заданы на уровне  $T_n = 10$ ;  $T_0 = 50$ .

Таблица 4.1

## Результаты замера контролируемого параметра

Середина интервала $t_i$	Частота интервала $m_i$
15	2
20	15
25	65
30	115
35	89
40	63
45	21
50	10
55	1

Сумма  $n = 381$

Требуется по программе SNR1MM01 установить наилучшее выравнивающее распределение, оценить его параметры, вычислить показатели точности и уровня настройки, а также ожидаемый процент брака. Наконец, вычислить оптимальное смещение, при котором брак можно снизить до минимума при неизменном показателе точности технологического процесса.

Запустив программу и введя исходные данные: середину интервала  $t_i$  и частоту  $m_i$ , – получим результаты расчетов, которые представлены в приведенной ниже форме (см. таблицу 4.2)

Показатели асимметрии, островершинности и критерий  $L1$  определяют тип выравнивающего распределения.

Наилучшим выравнивающим распределением оказалось бета-распределение (тип 1.1). Показатель уровня настройки  $K_H = 0.072835$ , а показатель точности  $K_T = 0.985839$ , т. е. близок к единице.

В данном случае брак возник из-за смещения статистического распределения относительно поля конструкторского допуска. Брак составил 1.1469 %, что больше предельно допустимого 0.27 %, и весь он находится на верхней границе поля конструкторского допуска. Если сместить статистическое распределение на 5.44 единицы измерения в сторону нижней границы конструкторского допуска (за счет регулирования среднего значения), то общий брак снизится до 0.21 %, т. е. в 5.5 раза, при этом брак на нижней границе конструкторского допуска составит  $Q_H = 0.0578$  %, а на верхней границе  $Q_B = 0.1522$  %.

В случае, если  $K_T > 1$ , брак тоже можно уменьшить в несколько раз, но не ниже предельно допустимого уровня. В этом случае следует предпринять все необходимые меры по уменьшению рассеяния контролируемого параметра.

Таблица 4.2

## Показатели статистического распределения (SNR1MM01)

Дата/время 02 – 04 – 2002/15:02:42

К-во наблюдений	381
К-во интервалов	9
Ширина интервала	5
Среднее	32.91339
Дисперсия	47.8114
Центр. момент 3-го порядка	110.542
Центр. момент 4-го порядка	6785.571
Ср. квадратич. отклонение	6.914579
Коеф-т вариации %	21.00841
Показатель асимметрии	.111805
Показатель островершинности	2.968408
Критерий В. Нешитого $L1 = 2.80612$	

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПА 1.1  
С ПАРАМЕТРАМИ

$AU = 1.218565E-02$ ;  $K = 8.078631$ ;

$U = 5.033157E-02$ ;  $L = 9.191145$ ;  $N = 6.457543E-09$

Случайная величина  $X$  задана на интервале  $9.191145 < X < 91.25488$

$P(X) = N \cdot (X - L)^{K-1} \cdot (1 - AU \cdot (X - L))^{1/U - 1}$

## Показатели уровня качества (SNR1MM01)

Дата/время 02 – 04 – 2002/15:03:57

Кол-во наблюдений	381
Среднее из опыта $W1$	32.91339
Среднее квадратич. отклонение (с.к.о.) $Sx$	6.914579
Центр поля допуска $T0$	30
Ширина поля допуска $TX = 50 - 10$	40
Отношение допуска к с.к.о. ( $TX/SX$ )	5.784879
Смещение центров рассеян. и допуска $E = W1 - T0$	2.913387
Ширина поля рассеяния $RX$ при $R_{дов.} = .9973$	39.43354
Нижняя граница поля рассеяния	16.29199
Верхняя граница поля рассеяния	55.72554
Отношение поля рассеяния к с.к.о. ( $RX/SX$ )	5.702957
Показатель уровня настройки $KN = E/TX$	.072835
Показатель точности $KT = RX/TX$	.985839
Ожидаемый процент брака $Q$ %	1.146901
в т. ч. на нижней границе поля допуска	0
на верхней границе поля допуска	1.146901
Рекомендуется сместить среднее значение на величину $SM = -5.44006$	
Тогда $W1$ испр. ср. = 27.47333 $Q$ % = .2099991	
$Q_H = .0578$ $Q_B = .1522005$	

Таким образом, обобщенные распределения, доведенные до программной реализации (в виде серии программ под общим названием SNR), являются мощным инструментом для статистического анализа и регулирования технологических процессов, а также для решения многих других задач.

При этом достигается весьма высокая вероятность вычисления наилучшей выравнивающей кривой, что подтверждено апробацией программ на большом статистическом материале в течение ряда лет (с 1990 г.).

В заключение отметим, что при использовании обобщенных распределений инженеру по качеству совершенно не нужно выдвигать никаких гипотез о виде выравнивающего распределения, не обязательно вникать в детали теории обобщенных распределений и методы расчетов. Все сложности расчетов заложены в компьютерные программы. На долю инженера по качеству остается сбор достоверных статистических данных. Их можно предварительно сгруппировать по интервалам одинаковой или различной ширины или же ввести в не сгруппированном виде. Программа сама их сгруппирует и выдаст рекомендацию по смещению центра статистического распределения для уменьшения брака до минимального значения при неизменном коэффициенте точности  $K_T$ . Если  $K_T > 1$ ,

а точнее, больше величины  $K_T > \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ , необходимо принять меры по уменьшению рассеяния (разброса) значений контролируемого параметра. Это весьма ответственное мероприятие, требующее серьезного анализа всей цепочки технологического процесса, чтобы выявить этапы, где создается наибольшее рассеяние и принять необходимые, с точки зрения специалистов, меры.

Последующая обработка статистического распределения по той же программе покажет уровень эффективности управляющих воздействий, поскольку программа объективно оценит ожидаемый уровень брака до и после принятия мер по уменьшению рассеяния.

На основании вышеизложенного можно дать несколько советов инженерам по качеству по использованию программных средств, которые предлагает рынок.

Нежелательно приобретать программы, которые построены на базе небольшого числа отдельных распределений, особенно если программа предлагает ввести на ваш выбор выравнивающее

распределение из некоторого меню. Такие программы перекалывают на вас всю ответственность за результаты расчетов. Хорошая программа должна вычислять наилучшее выравнивающее распределение из бесконечного множества частных случаев, т. е. она должна быть построена на базе обобщенных распределений.

Программы, построенные на базе обобщенных распределений, существуют только в авторском исполнении. Поскольку теория обобщенных распределений опубликована лишь частично, программист не в состоянии разработать эффективную и надежную программу по статистической обработке данных, а также сопутствующую документацию на базе этой теории. Для создания программ необходимо разработать множество новых алгоритмов, что невозможно сделать без глубокого знания теории обобщенных распределений. По всем вопросам, связанным с применением обобщенных распределений, следует обращаться к автору теории, ибо только он может гарантировать выбор наиболее подходящей программы, метода оценивания параметров для решения конкретных задач пользователя, предоставить сопровождение, консультации (тел. 8 (017) 251-06-35). Читателю предоставляется возможность проверить работу имеющейся у него программы по статистическому распределению, приведенному в таблице 4.1, и результаты сравнить с данными таблицы 4.2.

**Василий Васильевич НЕШИТОЙ,**

*д.т. н., главный научный сотрудник*

*Республиканского научно-технического центра по ценообразованию в строительстве Министерства архитектуры и строительства*

*Республики Беларусь*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Нешитой В.В. Методы статистического анализа на базе обобщенных распределений: Учеб.-метод. пособие. – Мн., Веды, 2001. – 168 с.
2. Кутузов В.А. Статистические методы управления качеством продукции: Учебное пособие.-М.: АНХ при Совете Министров СССР, 1983. – 49 с.
3. Семь инструментов качества в японской экономике.-М.: Изд-во стандартов, 1990. – 88 с.
4. Нешитой В.В. Статистический анализ и регулирование технологических процессов на базе обобщенных распределений с параметром сдвига: Методические рекомендации.-Мн.: БелГИСС, 2001. – 40 с.
5. Гончаров Э.Н., Козлов В.В., Круглова Е.Д. Контроль качества продукции.-М.: Изд-во стандартов, 1987. – 120 с.